EXERCICES ALTERNATIFS

Une fonction continue mais dérivable nulle part

Sources et figures: `applications-continues-non-derivables/`.

Version imprimable: `applications-continues-non-derivables.pdf`

Séries. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *Découverte.*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Réfléchir sur les notions de continuité et de dérivabilité, et sur leur interprétation géométrique ; construire une nouvelle fonction à l'aide d'une série de fonctions, visualiser cette série, étudier ses propriétés.*

L'exercice est long, mais on peut n'en faire que la partie II (construction de la fonction de Weierstrass et preuve de la continuité, sans preuve de la non-dérivabilité). Par contre, il me semble que pour faire la partie III, il vaut mieux avoir fait les rappels de dérivabilité de la partie I.

Montrer que la fonction de Weierstrass n'est pas dérivable est assez difficile, et nécessite des estimées précises. Après avoir présenté cette fonction, on en donne ici une variante, en remplaçant le sinus par une fonction affine par morceaux. La preuve de la non-dérivabilité de cette nouvelle fonction repose alors sur des considérations plus géométriques : la remarque clé est qu'on a choisi la série pour que les pentes de la somme partielle S_n (qui est affine par morceaux) sont minorées, en valeurs absolues, par un nombre C_n qui tend vers l'infini (propriété P1 ci-dessous). D'autre part, la fonction limite F coïncide avec S_n sur tous les multiples de $1/n$. Ceci permet d'encadrer tout nombre x par deux nombres y_n et y'_n en lesquels F et S_n coïncident, de manière à ce que quand n tend vers $+\infty$, ces points tendent vers x. D'après ce qui précède, la pente entre y_n et y'_n doit tendre vers $+\infty$, ce qui permet de conclure avec un petit argument sur les pentes des droites (voir I.1.d).

La figure 1[1] montre l'allure de quelques sommes partielles de la fonction F (partie III).

Le but de cet exercice est de construire une fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeur dans $\mathbb{R}$, qui est continue, mais qui n'est dérivable en aucun point de l'intervalle.

I. Rappels préliminaires

Question 1. Pentes des droites

a. Sur la route, avant une pente importante, on trouve un panneau indiquant la valeur de la pente (par exemple :10%). Que signifie ce nombre ?

b. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction dont le graphe est une droite du plan $\mathbb{R}^2$; le nombre a s'appelle le *coefficient directeur* (ou pente) de la droite. Soient x_1 et x_2 deux réels, et M_1 et M_2 les deux points du graphe correspondant. Le *taux d'accroissement* entre x_1 et x_2 est le rapport entre la distance verticale et la distance horizontale de M_1 à M_2. Donner la formule du taux d'accroissement. Quel est le lien avec la pente de la droite ? Quel est le lien avec l'angle entre la droite et la direction horizontale ?

c. Estimer graphiquement les pentes des droites de la figure 2. Que se passe-t-il quand on fait varier la pente entre $-\infty$ et $+\infty$?

[1] À ne montrer aux étudiants qu'après la question 1.

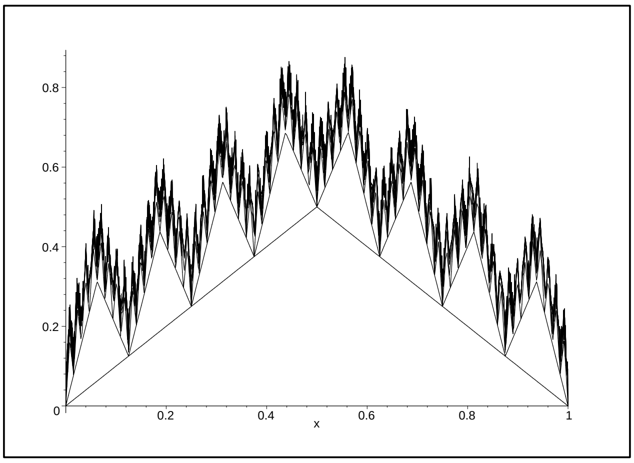

FIG. 1: La fonction F.

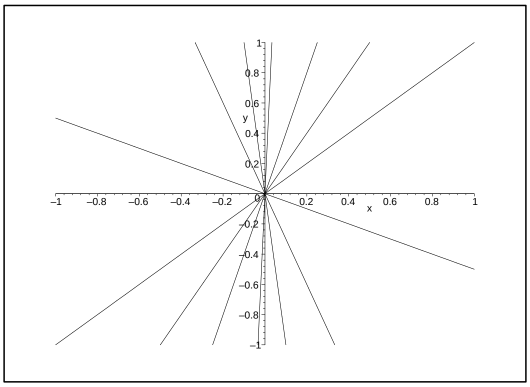

FIG. 2: Pentes des droites

d. Une propriété des pentes des droites Soient M_1, M_2, M_3 trois points du plan d'abscisses respectives $x_1 < x_2 < x_3$. Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 les droites passant respectivement par les points M_2 et M_3, M_1 et M_2, et M_1 et M_2. Expliquer par un dessin (ou deux !) pourquoi *la pente de Δ_2 est toujours plus petite que l'une des deux autres pentes (en valeurs absolues).*

Question 2. Dérivée d'une fonction

a. Estimer graphiquement la dérivée de la fonction de la figure 3 en quelques points. Dessiner l'allure de la fonction dérivée.

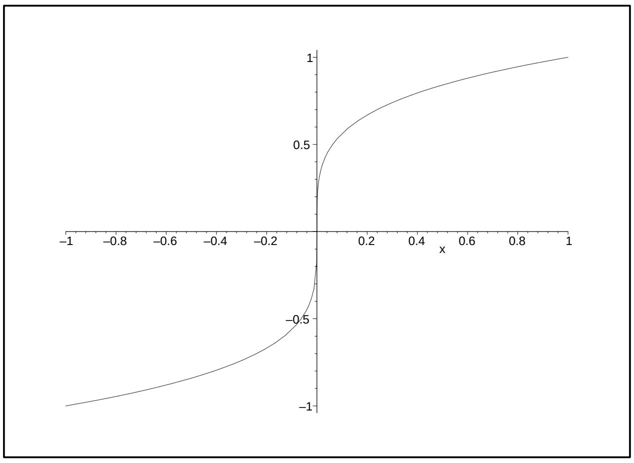

FIG. 3: Estimation graphique de la dérivée

b. Donner la définition géométrique (intuitive) de la continuité, puis celle de la dérivabilité.

c. Donner les définitions formelles.

d. Dessiner l'allure du graphe d'une fonction non continue en 0 ; d'une fonction continue non dérivable en 0.

e. La fonction de la figure 3 est-elle dérivable en 0 ?

On utilisera par la suite le lemme suivant (qui est une conséquence immédiate de la définition de la dérivabilité) :

LEMME 1 *Si une fonction f est dérivable en un point x_0, et si $(y_n)_{n\geq 0}$ est une suite tendant vers x_0, alors la suite des taux d'accroissements*

$$\frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0}$$

tend vers le nombre réel $f'(x_0)$.

II. La fonction de Weierstrass

La première fonction continue partout mais dérivable nulle part a été construite par Weierstrass (mathématicien allemand, 1815-1897). Cette fonction a aidé à clarifier les notions de continuité et de dérivabilité, et a obligé les mathématiciens a en donner des définitions précises : auparavant, ceux-ci se contentaient des "définitions" intuitives, et pensaient qu'une fonction continue était toujours dérivable sauf éventuellement en quelques points : la construction de Weierstrass est venue contredire cette idée intuitive.

Idée de la construction

L'idée de Weierstrass est de partir d'une fonction f_0 qui est parfaitement dérivable, puisqu'il s'agit de la fonction sinus (figure 4). Puis on perturbe cette première fonction en lui ajoutant une autre sinusoïde, de période 5 fois plus petite, et d'amplitude 2 fois moins grande ; cette deuxième fonction, notée f_1, est représentée sur la figure 5, à gauche. Quand on ajoute f_1 à f_0, on obtient une courbe qui zig-zague autour du graphe de f_0 (voir le dessin de droite ; en effet, f_1 est alternativement positive et négative ; quand f_1 est positive, le graphe de $f_0 + f_1$ est situé au-dessus de celui de f_0, et il est situé au-dessous lorsque f_1 est négative ; quand f_1 s'annule, les deux graphes se rencontrent).

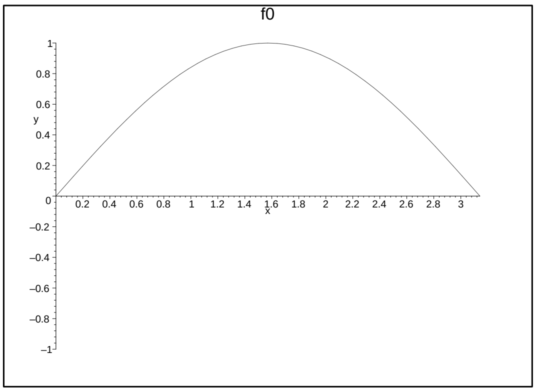

FIG. 4: Idée de la construction de la fonction de Weierstrass (1)

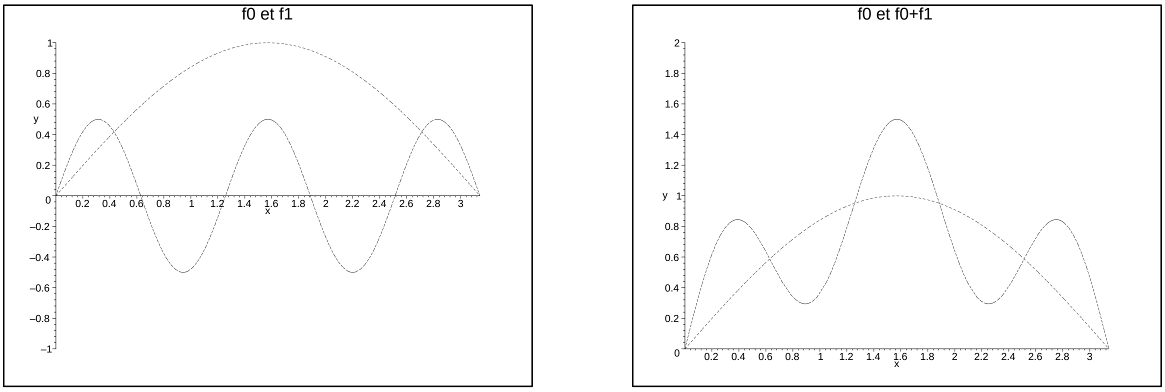

FIG. 5: Idée de la construction de la fonction de Weierstrass (2)

Et on recommence : on prend la fonction f_2 qui est une sinusoïde de période 5 fois plus petite et d'amplitude 2 fois moins grande que f_1, et on l'ajoute encore à la fonction

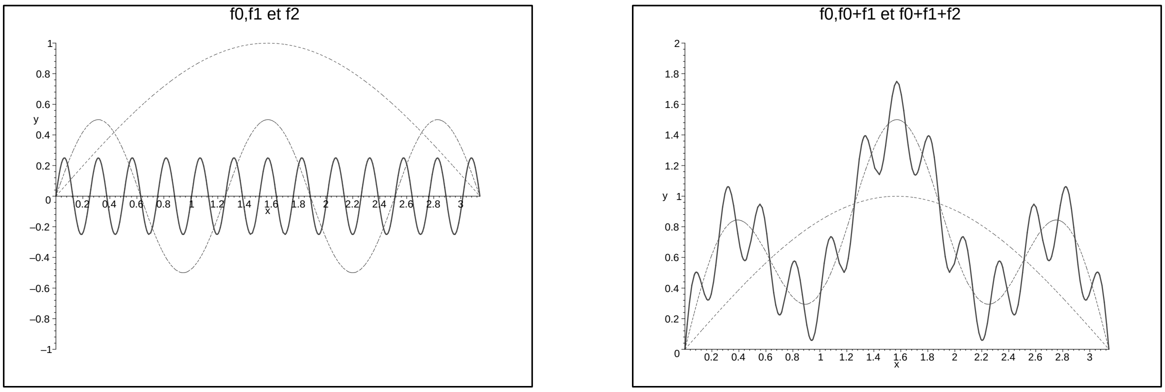

Fig. 6: Idée de la construction de la fonction de Weierstrass (3)

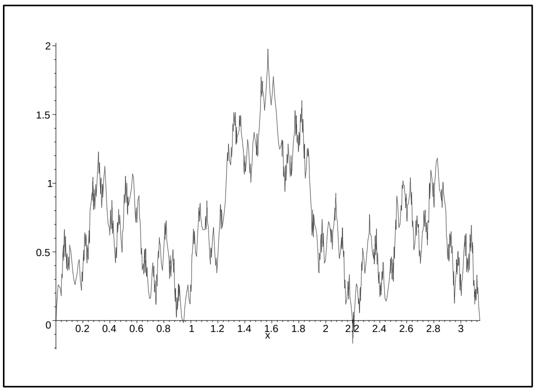

Fig. 7: Idée de la construction de la fonction de Weierstrass (∞)

$f_0 + f_1$ (voir la figure 6). On recommence le processus à l'infini (figure 7).

Question 1. Définition formelle

Définir précisément f_0, f_1, f_2, $\ldots$, et F, la fonction limite.

Question 2. Continuité

Montrer que F est continue.

Question 3. Dérivabilité

Quelle serait la procédure standard pour montrer que F est dérivable ? Essayez ! Qu'est-ce qui ne marche pas ? Pourquoi ne peut-on pas en conclure que F n'est pas dérivable ?

En fait, la fonction F n'est pas dérivable, mais c'est assez difficile à montrer[2]*. On va plutôt examiner une variante de cette première construction, pour laquelle la preuve sera plus facile.*

III. Une version géométrique de la fonction de Weierstrass

Idée de la construction

Cette fois-ci, on part de la fonction f_0 représentée à la figure 8, dont le graphe a la forme d'une dent de hauteur $1/2$ et qui est périodique de période 1. La fonction f_1 est alors similaire à f_0, avec huit fois plus de "dents", chaque dent étant deux fois moins élevée que la dent de f_0. Et on recommence : la fonction f_2 a huit fois plus de dents que f_1, de hauteur encore deux fois moins grande ; *etc.*.

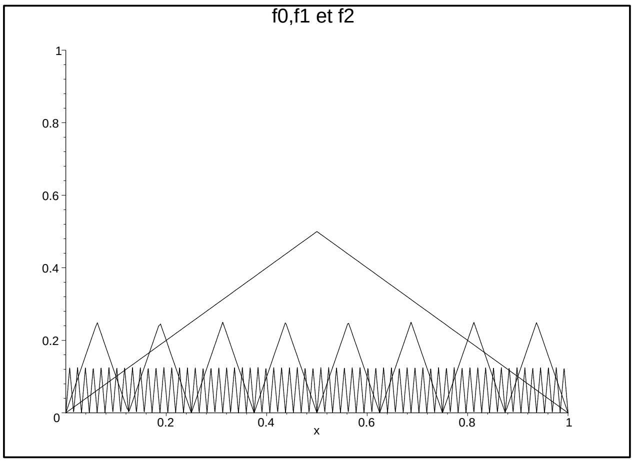

FIG. 8: Les nouvelles fonctions f_0, f_1 et f_2.

Question 1. Dessin et définition formelle

Dessiner (le plus précisément possible) $f_0 + f_1$, et (vaguement) $f_0 + f_1 + f_2$. Définir précisément f_1, f_2, $\dots$, et F, la fonction limite, **en fonction de** f_0.

[2] L'idée est que les graphes des fonctions successives f_0, $f_0 + f_1$, $f_0 + f_1 + f_2$, *etc.*, présentent de plus en plus d'oscillations : quand on promène une tangente le long du graphe de $f_0 + f_1 + f_2$, par exemple, la pente oscille énormément. À la limite, il n'y a plus de tangentes au graphes. Pour transformer cette idée en une preuve rigoureuse, il faut faire des estimations précises des pentes des fonctions successives. Notamment, le nombre "5"qui apparait dans la construction n'est pas choisi au hasard, un nombre plus petit peut produire une fonction parfaitement dérivable...

Question 2. Continuité

Montrer que F est continue.

Question 3. Dérivabilité

On veut montrer que F n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Soient $S_0 = f_0$, $S_1 = f_0 + f_1$, $S_2 = f_0 + f_1 + f_2$, $\dots$ les sommes partielles de la fonction F. *L'idée de la preuve est d'étudier les pentes des fonctions S_n, et leur lien avec les taux d'accroissements de la fonction limite F.*

a. Pentes de S_n

Définition On dit qu'une fonction est *affine par morceaux* sur l'intervalle $[0, 1]$ si cet intervalle est découpé en sous-intervalles, sur chacun desquels la fonction est affine (c'est-à-dire que son graphe est un segment).

Dans ce cas, la dérivée est bien sûr constante sur chaque morceau, et est égale à la pente du segment (voir la section I.1.b).

Soit $n > 0$. La fonction S_n est affine par morceaux. Donner les valeurs de la plus grande pente et de la plus petite pente (en valeur absolue). Montrer la propriété **P1** (voir aussi l'aide ci-dessous) :

Propriété P1 *Il existe une suite $(C_n)_{n>0}$, tendant vers $+\infty$, telle que (pour tout $n > 0$), les valeurs absolues des pentes de tous les morceaux de la fonction S_n sont supérieures ou égales à C_n.* [3]

- **Aides pour la preuve de P1**
  - Soit f une fonction, et g la fonction définie par $g(x) = f(8x)/2$. Quel lien y a-t-il entre la dérivée de g et celle de f ?
  - Déterminer les pentes des fonctions f_0, f_1, f_2, *etc.*.
  - Donner la valeur de la pente sur chacun des morceaux de S_1. Quel est (en valeur absolue) la plus grande pente, la plus petite ?
  - Déterminer de même la plus petite pente de la fonction S_n.

b. Lien entre F et S_n Soit n un entier. Trouver tous les endroits où les fonctions F et S_n sont égales ; autrement dit, montrer la propriété **P2** (en complétant les pointillés, voir l'aide ci-dessous) :

Propriété P2 *Soit $x \in [0, 1]$; alors*

$$F(x) = S_n(x) \Leftrightarrow x \in \{\dots\}.$$

- **Aides pour la preuve de P2** Quels sont les points de l'intervalle $[0, 1]$ où F s'annule ? Trouver les points x où $F(x) = f_0(x)$; puis, pour chaque entier $n \geq 1$, ceux où $F(x) = S_n(x)$.

[3] C'est pour obtenir cette propriété qu'on a choisit "huit fois plus de pics" quand on passe de f_n à f_{n+1}.

c. Dérivabilité en 0 [4] *On peut maintenant montrer que F n'est pas dérivable en 0.* Aides : utiliser le lemme 1 et les propriétés **P1** et **P2**.

d. Lien entre les taux d'accroissement de F et des pentes de S_n À partir de maintenant, on se donne un nombre $x_0 \in]0,1[$. Montrer la propriété **P3** :

PROPRIÉTÉ P3 *Pour tout entier $n > 0$, il existe deux réels y_n et y'_n tels que :*

1. *y_n et y'_n sont de part et d'autre de x_0 (c'est-à-dire que $x_0 \in [y_n, y'_n]$) ;*
2. *la longueur de l'intervalle $[y_n, y'_n]$ est inférieure à $1/8^n$;*
3. *le taux d'accroissement de F entre y_n et y'_n est supérieur (en valeur absolue) à C_n (où (C_n) est la suite définie dans la propriété **P1**).*

• **Aides pour la preuve de P3** Que peut-on dire du taux d'accroissement de F entre deux points successifs où $F = S_n$?

e. On reprend les notations de la question précédente. Soit, pour chaque entier $n > 0$, t_n le taux d'accroissement, pour F, entre x_0 et y_n et t'_n celui entre x_0 et y'_n. Montrer que l'un des deux taux d'accroissement t_n et t'_n est supérieur (en valeur absolue) à C_n (aide : utiliser la question I.1.d).

f. Montrer enfin que F n'est pas dérivable en x_0 (utiliser le lemme 1, partie I).

g. Conclure.

---

[4] Cette question n'est pas indispensable, mais elle aide à comprendre la fin de la preuve.