

EXERCICES ALTERNATIFS

Plusieurs questions sur un système.

©2001 Vincent GUIRADEL (copyleft LDL : Licence pour Documents Libres).

Source: `questions-systeme.tex`.

Version imprimable: `questions-systeme.pdf`

Algèbre linéaire. DEUG première année. Angle pédagogique : Méta-mathématiques.

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Le but de cet exercice, est de mettre en évidence le fait qu'il y a plusieurs questions à se poser sur un système d'équations à part sa résolution.*

Lorsqu'on a un système d'équations, il n'y a pas que sa résolution qui est intéressante. On peut se poser d'autres questions : est-ce que le système admet au moins une solution ? Est-ce qu'il en admet une unique ?

a. On considère le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y + z + t & = a \\ x - y - z - t & = b \\ -x - y + t & = c \\ -3x + y - 3z - 7t & = d \end{cases}$$

1. A quelle condition (S) admet-il une solution ?
2. Montrer que si $a, b, c, d > 0$ alors (S) n'a pas de solution.
3. Quel est l'ensemble des solutions du système homogène associé ?

b. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $f(X) = A.X$.

1. Calculer $f(X)$. Montrer que f est linéaire.
2. Quelle est sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 ?
3. f est-elle surjective ? injective ? Trouver l'image et le noyau de f .
4. f est-elle inversible ?
5. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'image de f ? au noyau de f ?

c.

1. Le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'espace vectoriel engendré par $V_1 =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} ?$$

2. Ces 4 vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?
