Trouver la plus grande valeur propre par une méthode itérative

Source: `valeur-propre-iterative.tex`.

Version imprimable: `valeur-propre-iterative.pdf`

Algèbre linéaire. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *Maths assistées par ordinateur.*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Les objectifs sont multiples : voir les valeurs propres sous un autre jour ; expérimenter et conjecturer ; trouver les bonnes hypothèses pour que la convergence aie lieu (à ce sujet, il est très étonnant de voir que des étudiants ayant fait le calcul qui prouve la convergence, ont d'immenses difficultés à trouver les conditions de validités de ce calcul, même quand, au fond, il s'agit juste de ne pas diviser par* 0*.)*

Améliorations possibles : géométriquement, ce qui se passe est très clair : par exemple si la plus grande valeur propre est de module supérieur à 1, quand on itère un vecteur par la matrice, sa norme augmente, mais sa direction se raproche du sous-espace propre correspondant à la plus grande valeur propre. Comment pourrait-on faire visualiser ce système dynamique sous-jacent ?

On pourrait ne donner la deuxième partie (démonstration) qu'après que les étudiants aient abordé la première (pour éviter de vendre la mèche...)

Un des inconvénients de l'exercice est que les étudiants, avant la toute fin du DEUG, n'ont jamais manipulé la norme, et ne connaissent donc pas ses propriétés.

On rappelle que si v est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note $\| v \|$ le nombre $\sqrt{|v[1]|^2 + |v[2]|^2}$ (norme euclidienne, en Maple : norm). Cette norme vérifie l'inégalité triangulaire et $\| \lambda v \| = |\lambda| \, \| v \|$.

Phase expérimentale : choisir une matrice A, 2×2 à coefficients réels, au hasard, par exemple l'une des matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Vérifier (avec Maple) que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner des valeurs numériques approchées de ses valeurs propres (si elle n'est pas diagonalisable, changer de matrice !).

Choisir un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ au hasard. Calculer les premières valeurs des vecteurs $Av, \cdots, A^n v, \cdots$. Donner une conjecture sur la limite du rapport de $\| A^{n+1} v \|$ et $\| A^n v \|$, quand $n \to +\infty$.

Répéter l'expérience avec plusieurs matrices.

Démonstration. On veut prouver le résultat suivant : Soit A une matrice 2×2, diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et on note λ la valeur propre de plus grande valeur absolue. Montrer que si v est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, vérifiant une certaine condition (*à trouver !*), le quotient $\| A^{n+1} v \| \, / \, \| A^n v \|$ tend vers $|\lambda|$ quand $n \to +\infty$.

a. On pourra commencer par écrire la preuve pour une matrice diagonale.

b. Prouver ensuite le résultat dans le cas général d'une matrice 2×2 diagonalisable non diagonale.

c. Plus difficile : énoncer et prouver le résultat pour une matrice de taille quelconque.

Facultatif. Quand on manipule des matrices de très grande taille, le calcul du polynôme caractéristique est très long (le calcul d'un déterminant d'une matrice $p \times p$ demande plus de $p!$ "opérations élémentaires" (addition ou multiplication de 2 réels). Calculer le nombre d'opérations élémentaires pour calculer $\| A^{n+1}v \| / \| A^n v \|$ pour une matrice A de taille $p \times p$. Commenter ?
