

# EXERCICES ALTERNATIFS

## Comment calculer $\sqrt{2}$ quand on a oublié sa calculatrice ? (introduction à la méthode de Newton)

©2002 Frédéric LE ROUX (copyleft [LDL : Licence pour Documents Libres](#)).

Sources et figures: [Methode-de-Newton/](#).

Version imprimable: [Methode-de-Newton.pdf](#)

*Suites. DEUG première année.* Angle pédagogique : *Découverte.*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *La méthode de Newton est un sujet très riche pour le DEUG : on peut expérimenter graphiquement, numériquement, travailler sur la formule, essayer de prouver la convergence, étudier la rapidité de la convergence (théoriquement ou expérimentalement), généraliser en dimension supérieure, voir ce qui se passe quand ça ne converge pas (et entrevoir la recherche en dynamique complexe)... C'est aussi une méthode d'une grande importance pratique, puisque c'est sans doute, grâce à sa vitesse de convergence, la plus utilisée pour approcher un zéro de fonction.*

*Dans cet exercice, on demande aux étudiants de trouver la formule à partir d'une description graphique (surtout ne pas leur donner la formule alors qu'ils sont tout à fait capables de la trouver !); puis on l'utilise pour un calcul de  $\sqrt{2}$ ; enfin, on compare la rapidité de convergence avec la méthode par dichotomie (en gros, dans la méthode de Newton, le nombre de décimales justes double à chaque étape, alors qu'il augmente linéairement pour la dichotomie, et qu'il faut plus de trois coups pour chaque décimale supplémentaire).*

*Tous les calculs demandés sont faisables à la main (division à trois ou quatre chiffres), et on constate qu'on peut avoir une très bonne approximation d'une racine carrée, sans calculatrice, en peu de temps.*

*La première partie a été testée à un examen où les étudiants travaillaient en groupes de quatre, et a été globalement réussie.*

---

La méthode de Newton (ou méthode des tangentes) est une manière d’obtenir des approximations numériques d’un “zéro” d’une fonction (c’est-à-dire d’un nombre où la fonction s’annule). Dans cet exercice, on décrit cette méthode, puis on l’applique au calcul des premières décimales de  $\sqrt{2}$ . La deuxième partie de l’exercice propose de comparer cette méthode avec la méthode par dichotomie. <sup>1</sup>

## I. La méthode de Newton

### Question 1. Formule

À partir de l’encadré décrivant graphiquement la méthode de Newton, trouver la formule donnant  $x_1$  en fonction de  $x_0$ .

Quelles hypothèses doit-on faire sur  $f$  et  $x_0$  pour que la formule ait un sens ?

### Question 2. Calcul explicite

On veut utiliser la méthode de Newton pour calculer, à la main, une approximation décimale du nombre  $\sqrt{2}$ . Pour ça, on prend la fonction  $f(x) = x^2 - 2$  (remarquez que  $\sqrt{2}$  est bien un zéro de  $f$  !), et on part de  $x_0 = 1$ .

a. Tracer la fonction  $f$ , représenter graphiquement les nombres  $x_0, x_1, x_2$  et  $x_3$ . Calculer, à la main, les nombres  $x_1, x_2$  et  $x_3$  sous forme de fraction.

b. Sachant que le début du développement décimal de  $\sqrt{2}$  est :

1.414213562

dire, pour  $x_3$ , combien on a trouvé de “bonnes” décimales.

---

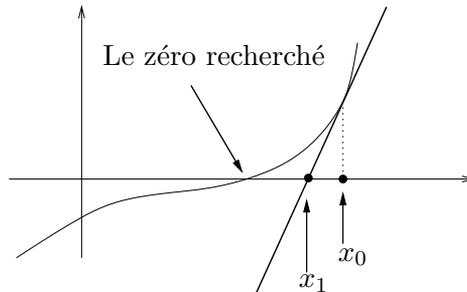
<sup>1</sup>Étant donné le titre de l’exercice, les calculs seront faits sans utiliser de calculatrice...

## La méthode de Newton

Toutes les méthodes de recherche numérique de zéro de fonctions suivent le même principe général : à partir d'une "première bonne approximation" du zéro recherché, trouver une approximation qui soit encore meilleure, puis recommencer...

Voici comment procède la méthode de Newton. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. On part d'un nombre "quelconque"  $x_0$  ;
2. à partir de  $x_0$ , on calcule un nouveau nombre  $x_1$  de la manière suivante (voir figure) : on trace la tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse  $x_0$ , et on détermine le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses. On appelle  $x_1$  l'abscisse de ce point d'intersection ;
3. et on recommence : on calcule un nouveau nombre  $x_2$  en appliquant le procédé décrit au point 2 où l'on remplace  $x_0$  par  $x_1$  ;
4. *et caetera...*



**c. Autres choix d'approximation initiale** On considère toujours la fonction  $f(x) = x^2 - 2$ . Que se passe-t-il si on part d'une autre valeur que 1 pour  $x_0$ ? Décrire, en fonction du choix de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}$ , le comportement de la méthode de Newton (ne pas oublier les cas particuliers!). Pour le zéro  $\sqrt{2}$  de cette fonction  $f$ , comment préciserait-on la notion de "première bonne approximation" dont parle l'encadré?

### Question 3. Preuve

Dans le cas précédent ( $f = x^2 - 2$  et  $x_0 = 1$ ), prouver que la suite  $(x_n)$  définie par la méthode de Newton converge vers  $\sqrt{2}$ .

## II. Partie optionnelle : comparaison avec la dichotomie

### La méthode par dichotomie

Voici une description de la méthode par dichotomie.

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dont on connaît le sens de variation autour de  $\alpha$  : par exemple,  $f$  est négative avant  $\alpha$  et positive après.

1. On commence par choisir un nombre  $x_0$  que l'on sait être plus petit que le zéro  $\alpha$  recherché ;
2. on choisit aussi un nombre  $x_1$  plus grand que  $\alpha$  ;
3. on prend pour  $x_2$  le milieu de l'intervalle  $[x_0, x_1]$  :  $x_2$  découpe cet intervalle en deux intervalles deux fois plus petits, l'intervalle de gauche  $[x_0, x_2]$  et l'intervalle de droite  $[x_2, x_1]$  ;
4. le nombre  $x_3$  est alors déterminé de la manière suivante : si  $\alpha$  est dans l'intervalle de gauche (autrement dit si  $f(x_2) > 0$ ), alors on choisit pour  $x_3$  le milieu de cet intervalle ; sinon, on choisit le milieu de l'intervalle de droite.
5. et on recommence : le nombre  $x_3$  découpe le nouvel intervalle en deux intervalles deux fois plus petits, et on choisit pour  $x_4$  le milieu d'un de ces deux intervalles, selon la position de  $\alpha$ .
6. *et caetera...*

### Question 1. Nouveau calcul explicite

On cherche à nouveau une approximation de  $\sqrt{2}$ . Pour ça, on va appliquer la méthode par dichotomie (voir encadré) avec  $x_0 = 1$  et  $x_1 = 2$ .

- a. Montrer rapidement (mais rigoureusement) que  $\sqrt{2} \in [x_0, x_1]$ .
- b. Calculer les nombres  $x_2, x_3, x_4, x_5$  sous forme de fraction. Représenter-les sur un dessin.
- c. Dire, pour  $x_5$ , combien on a trouvé de “bonnes” décimales.

### Question 2. Preuve

Dans le cas particulier précédent ( $f = x^2 - 2$  et  $x_0 = 1$ ), prouver que la suite  $(x_n)$  définie par la méthode de dichotomie converge vers  $\sqrt{2}$ .

### Question 3. Bilan

Comparer les deux méthodes sur cet exemple.

---