

EXERCICES ALTERNATIFS

Hyperplans et famille de vecteurs en position générale

©2002 Frédéric LE ROUX, Panos PAPAIOGLOU (copyleft [LDL : Licence pour Documents Libres](#)).

Source: [hyperplans.tex](#).

Version imprimable: [hyperplans.pdf](#)

Algèbre linéaire. DEUG première année. Angle pédagogique : Ludique.

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Ce sujet propose une jolie question de mathématiques. La preuve est assez difficile à trouver, bien que la réponse semble intuitivement évidente (quoiqu'en dimension 47?...). Après avoir laissé les étudiants explorer la question, on leur "vend" donc un schéma de preuve ; la difficulté consiste alors à comprendre ce schéma (qui implique une récurrence subtile), et à en rédiger tous les détails de la façon la plus convainquante possible.*

Remarque sur la deuxième partie : on peut aussi montrer la version affine de cette propriété : il existe dans \mathbb{R}^n une famille infinie de vecteurs telle que dès qu'on en prend $n + 1$, ils sont affinement indépendants (prendre les vecteurs du type (x, x^2, \dots, x^n)). Une conséquence intéressante, et immédiate, est un théorème de plongement "du type Whitney" : tout graphe se plonge dans \mathbb{R}^3 (sans point double, contrairement à \mathbb{R}^2) ; et plus généralement, tout complexe simplicial de dimension k se plonge dans \mathbb{R}^{2k+1} (et on comprend bien la raison du "2k + 1"). Le plongement des graphes est probablement à la portée des étudiants de DEUG, et donnerait une motivation intéressante à l'exercice ; malheureusement, celui-ci deviendrait beaucoup plus long.

I. Hyperplans de \mathbb{R}^n

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :

QUESTION \mathbb{R}^n est-il réunion d'un nombre fini d'hyperplans ?

On rappelle qu'un hyperplan dans \mathbb{R}^n est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Question 1. Exploration

a. **Cas $n = 2$** Traduisez le problème en dimension 2. Avez-vous une idée intuitive de la réponse? Pouvez-vous prouver que votre intuition est juste?

b. **Cas $n = 3$** Mêmes questions pour $n = 3$.

c. **Cas général** Avez-vous une idée de la réponse dans le cas général? Comment pourrait-on écrire une preuve?

Question 2. Petites questions

Commencez par répondre aux questions suivantes :

a. Si H_1 et H_2 sont deux hyperplans de \mathbb{R}^n , quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?

b. Même question pour un hyperplan H_1 et un plan P (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 2).

Question 3. Aide à la preuve en dimension $n \geq 3$

On propose le schéma de preuve suivant :

“On raisonne par récurrence sur la dimension. On considère des hyperplans H_1, \dots, H_k dans \mathbb{R}^n . En utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve un vecteur e_1 qui est dans H_1 et qui n'est dans aucun des autres hyperplans. De même, on trouve un vecteur e_2 qui est dans H_2 et qui n'est dans aucun des autres hyperplans. On se place ensuite dans le plan P engendré par e_1 et e_2 . En étudiant dans P les sous-espaces $H_i \cap P$, on arrive à la conclusion.”

Il manque bien sûr beaucoup de détails. Rédigez soigneusement une preuve en suivant ce schéma.

II. Famille de vecteurs en position générale

Le but de cette partie est de trouver, dans \mathbb{R}^n , une famille \mathcal{F} contenant une infinité de vecteurs et ayant la propriété suivante : dès qu'on choisit n vecteurs dans la famille \mathcal{F} , ils sont linéairement indépendants.

Question 1. Cas $n = 2$

Traduire la question dans \mathbb{R}^2 ; trouver une famille de vecteurs dans \mathbb{R}^2 qui répond à la question. Pouvez-vous en trouver d'autres ?

Question 2. Cas $n = 3$

Traduire la question dans \mathbb{R}^3 . Essayer d'y répondre.

Question 3. Suggestion

On propose d'étudier la famille \mathcal{F} contenant tous les vecteurs du type

$$v(x) = (1, x, x^2, \dots, x^{n-1}).$$

Montrer que cette famille répond au problème.

Indication Si n vecteurs sont liés, il existe un hyperplan qui les contient (pourquoi ?) ; quelle est l'équation cartésienne d'un hyperplan de \mathbb{R}^n ?

Question 4. Retour sur la partie I

A l'aide de la famille \mathcal{F} , trouver une nouvelle preuve pour la partie I.

Indication Combien de vecteurs de la famille \mathcal{F} un hyperplan peut-il contenir au maximum ?
