EXERCICES ALTERNATIFS

Comment calculer $\sqrt{2}$ quand on a oublié sa calculatrice ? (introduction à la méthode de Newton)

Sources et figures: `Methode-de-Newton/`.

Version imprimable: `Methode-de-Newton.pdf`

Suites. DEUG première année. Angle pédagogique : *Découverte.*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *La méthode de Newton est un sujet très riche pour le DEUG : on peut expérimenter graphiquement, numériquement, travailler sur la formule, essayer de prouver la convergence, étudier la rapidité de la convergence (théoriquement ou expérimentalement), généraliser en dimension supérieure, voir ce qui se passe quand ça ne converge pas (et entrevoir la recherche en dynamique complexe)... C'est aussi une méthode d'une grande importance pratique, puisque c'est sans doute, grâce à sa vitesse de convergence, la plus utilisée pour approcher un zéro de fonction.*

Dans cet exercice, on demande aux étudiants de trouver la formule à partir d'une description graphique (surtout ne pas leur donner la formule alors qu'ils sont tout à fait capables de la trouver !) ; puis on l'utilise pour un calcul de $\sqrt{2}$; enfin, on compare la rapidité de convergence avec la méthode par dichotomie (en gros, dans la méthode de Newton, le nombre de décimales justes double à chaque étape, alors qu'il augmente linéairement pour la dichotomie, et qu'il faut plus de trois coups pour chaque décimale supplémentaire).

Tous les calculs demandés sont faisables à la main (division à trois ou quatre chiffres), et on constate qu'on peut avoir une très bonne approximation d'une racine carrée, sans calculatrice, en peu de temps.

La première partie a été testée à un examen où les étudiants travaillaient en groupes de quatre, et a été globalement réussie.

La méthode de Newton (ou méthode des tangentes) est une manière d'obtenir des approximations numériques d'un “zéro” d'une fonction (c'est-à-dire d'un nombre où la fonction s'annule). Dans cet exercice, on décrit cette méthode, puis on l'applique au calcul des premières décimales de $\sqrt{2}$. La deuxième partie de l'exercice propose de comparer cette méthode avec la méthode par dichotomie. [1]

I. La méthode de Newton

Question 1. Formule

À partir de l'encadré décrivant graphiquement la méthode de Newton, trouver la formule donnant x_1 en fonction de x_0.

Quelles hypothèses doit-on faire sur f et x_0 pour que la formule ait un sens ?

Question 2. Calcul explicite

On veut utiliser la méthode de Newton pour calculer, à la main, une approximation décimale du nombre $\sqrt{2}$. Pour ça, on prend la fonction $f(x) = x^2 - 2$ (remarquez que $\sqrt{2}$ est bien un zéro de f !), et on part de $x_0 = 1$.

[1] Étant donné le titre de l'exercice, les calculs seront faits sans utiliser de calculatrice...

a. Tracer la fonction f, représenter graphiquement les nombres x_0, x_1, x_2 et x_3. Calculer, à la main, les nombres x_1, x_2 et x_3 sous forme de fraction.

b. Sachant que le début du développement décimal de $\sqrt{2}$ est :

$$1.414213562$$

dire, pour x_3, combien on a trouvé de "bonnes" décimales.

c. Autres choix d'approximation initiale On considère toujours la fonction $f(x) = x^2 - 2$. Que se passe-t-il si on part d'une autre valeur que 1 pour x_0 ? Décrire, en fonction du choix de x_0 dans $\mathbb{R}$, le comportement de la méthode de Newton (ne pas oublier les cas particuliers !). Pour le zéro $\sqrt{2}$ de cette fonction f, comment préciserait-on la notion de "première bonne approximation" dont parle l'encadré ?

Question 3. Preuve

Dans le cas précédent ($f = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$), prouver que la suite (x_n) définie par la méthode de Newton converge vers $\sqrt{2}$.

II. Partie optionnelle : comparaison avec la dichotomie

Question 1. Nouveau calcul explicite

On cherche à nouveau une approximation de $\sqrt{2}$. Pour ça, on va appliquer la méthode par dichotomie (voir encadré) avec $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

a. Montrer rapidement (mais rigoureusement) que $\sqrt{2} \in [x_0, x_1]$.

b. Calculer les nombres x_2, x_3, x_4, x_5 sous forme de fraction. Représenter-les sur un dessin.

c. Dire, pour x_5, combien on a trouvé de "bonnes" décimales.

Question 2. Preuve

Dans le cas particulier précédent ($f = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$), prouver que la suite (x_n) définie par la méthode de dichotomie converge vers $\sqrt{2}$.

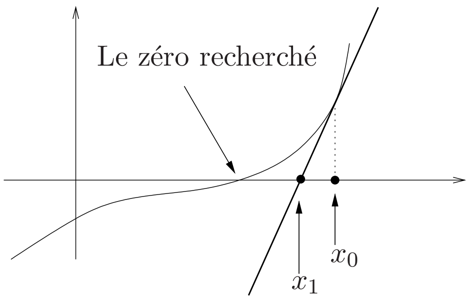
Question 3. Bilan

Comparer les deux méthodes sur cet exemple.

La méthode de Newton

Toutes les méthodes de recherche numérique de zéro de fonctions suivent le même principe général : à partir d'une "première bonne approximation" du zéro recherché, trouver une approximation qui soit encore meilleure, puis recommencer...
Voici comment procède la méthode de Newton. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On part d'un nombre "quelconque" x_0 ;
2. à partir de x_0, on calcule un nouveau nombre x_1 de la manière suivante (voir figure) : on trace la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0, et on détermine le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses. On appelle x_1 l'abscisse de ce point d'intersection ;
3. et on recommence : on calcule un nouveau nombre x_2 en appliquant le procédé décrit au point 2 où l'on remplace x_0 par x_1 ;
4. *et caetera...*



La méthode par dichotomie

Voici une description de la méthode par dichotomie.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont on connait le sens de variation autour de α : par exemple, f est négative avant α et positive après.

1. On commence par choisir un nombre x_0 que l'on sait être plus petit que le zéro α recherché ;
2. on choisit aussi un nombre x_1 plus grand que α ;
3. on prend pour x_2 le milieu de l'intervalle $[x_0, x_1]$: x_2 découpe cet intervalle en deux intervalles deux fois plus petits, l'intervalle de gauche $[x_0 x_2]$ et l'intervalle de droite $[x_2 x_1]$;
4. le nombre x_3 est alors déterminé de la manière suivante : si α est dans l'intervalle de gauche (autrement dit si $f(x_2) > 0$), alors on choisit pour x_3 le milieu de cet intervalle ; sinon, on choisit le milieu de l'intervalle de droite.
5. et on recommence : le nombre x_3 découpe le nouvel intervalle en deux intervalles deux fois plus petits, et on choisit pour x_4 le milieu d'un de ces deux intervalles, selon la position de α.
6. *et caetera...*