Exercices Alternatifs

Rotations du plan : géométrie et algèbre linéaire.

Source: `Rotations-du-plan.tex`.

Version imprimable: `Rotations-du-plan.pdf`

Algèbre linéaire. DEUG première année. Angle pédagogique : *Visualisation.*

Objectifs et commentaires. *L'objectif principal est de donner un peu de sens géométrique à quelques notions d'algèbre linéaire (matrice d'une application, inverse, changement de bases, vecteur propre, racine carré). D'autre part, il est indispensable que les étudiants aient des exemples d'applications linéaires présent à l'esprit pour tester et visualiser les notions abstraites introduites dans le cours. Il serait dommage de ne pas utiliser les rotations, que les étudiants ont déjà rencontrées (il serait dommage aussi de se limiter à ces exemples, qui peuvent être trompeurs, puisque les rotations ont des propriétés bien plus fortes que la simple linéarité).*

Dans la question 1.b, les étudiants ont tendance à dessiner leurs vecteurs issus du centre de la rotation ; autrement dit, ils testent la linéarité de l'application tangente et non pas de la rotation elle-même ! Et au fond, ils ont raison, il est très bizarre de vouloir faire agir une rotation non centrée en 0 *sur des vecteurs "issus de* 0*". Il faut probablement ré-écrire cette question en évoquant la double vie des éléments de* $\mathbb{R}^2$*, vecteurs et points...*

L'exercice complet est long (plusieurs heures), mais découpés en modules assez indépendants.

Le but de cet exercice est d'étudier les rotations du plan, en confrontant le point de vue géométrique au point de vue matriciel.

Pour tout θ réel, on note R_θ la rotation du plan $\mathbb{R}^2$ de centre $O = (0,0)$ et d'angle θ.

Question 1. Linéarité

a. On prend la rotation d'angle $\theta = \pi/4$. Faites un dessin pour tester, sur quelques vecteurs, la linéarité de cette application.

b. Testez la linéarité de la rotation de même angle, et de centre $(1,0)$. Conclusion ?

On admet (provisoirement) que les rotations de centre O sont linéaires.

Question 2. Matrices et géométrie

a. Déterminer (géométriquement) la matrice M_θ de R_θ dans la base canonique. Pour $\theta = \pi/4$, déterminer géométriquement l'image du vecteur $(1,1)$; puis retrouvez le résultat matriciellement.

b. On raisonne géométriquement : décrire l'application composée $R_\theta \circ R_{\theta'}$. En déduire, sans calcul, la matrice de cette application.

c. On raisonne matriciellement : retrouvez par le calcul la matrice précédente.

d. À partir de ce qui précède, expliquer une façon simple de retrouver certaines formules trigonométriques, si on les a oubliées.

Question 3. (optionnelle) Rotations réciproques

Quelle est l'application réciproque de la rotation R_θ, et que vaut sa matrice ? comme à la question précédente, donner un argument géométrique, puis un argument matriciel.

Question 4. Changement de bases

a. On prend $\theta = \pi/2$. Donner la matrice de $R_{\frac{\pi}{2}}$ dans la base canonique, puis dans la base $((1,0),(1,1))$. Ici encore, on pourra raisonner géométriquement, puis matriciellement.

b. (Question plus difficile) Existe-t-il une base dans laquelle $R_{\frac{\pi}{2}}$ a une matrice diagonale ? [*Idée : raisonnez par l'absurde ; comment interpréter géométriquement le fait d'avoir une matrice diagonale dans une certaine base ?...*]

Question 5. Racines carrées

On voudrait savoir combien il y a de *racines carrées* de la matrice Identité, c'est-à-dire de matrices M, de taille 2×2, telles que $M \times M = Id$.

a. On propose d'abord d'envisager la question d'un point de vue purement matriciel. Donnez-vous 5 minutes, et cherchez le plus possible de telles matrices.

b. Donnez la traduction géométrique du problème (*i.e.* donnez un problème logiquement équivalent mais concernant les applications linéaires). Trouvez maintenant d'autres racines carrées de l'identité ! [Indication : quelles applications linéaires du plan connaissez-vous en plus des rotations ?...] Rappelez-vous que la question de départ était matricielle, on souhaite donc obtenir une réponse en terme de matrices (même si la méthode utilisée est géométrique).

c. Trouvez, de la même manière, des racines carrées de la matrice $-Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 6. Retour sur la linéarité

Montrer que les rotations R_θ sont linéaires. [*Idée : il suffit d'écrire la formule donnant les coordonnées de $R_\theta(x, y)$, où (x, y) est un point quelconque du plan. C'est plus facile avec les nombres complexes...*]
