Le tapis de Sierpinski

Source: `Tapis-de-Sierpinski.tex`.

Version imprimable: `Tapis-de-Sierpinski.pdf`

Séries. DEUG première année. Angle pédagogique : *Ludique.*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice peut sembler très facile ; néanmoins, on remarque que peu d'étudiants maîtrisent suffisamment les suites géométriques pour penser à utiliser la formule de somme* sans qu'on le leur suggère *(la connaissance est généralement mobilisable mais pas disponible...). Du coup, le comportement de la suite* (S_n) *est rarement justifié (même s'il leur semble "évident" qu'elle doit tendre vers* 0*).*

D'autre part, à la deuxième question, la réponse unanime est que la durée est nécessairement infinie, puisqu'il y a une infinité d'étapes : on retrouve une version du paradoxe de Zénon.

Ceci donne une illustration des deux principaux obstacles à la compréhension des séries : l'intuition suggère parfois qu'une série converge forcément puisqu'on ajoute des termes de plus en plus petits (la convergence est "évidente" dans la première question, ce qu'on retrouve souvent dans les exercices techniques dans la formule "le terme général tend vers 0*, donc la série converge"), ou bien au contraire, une série diverge forcément puisqu'on ajoute une infinité de termes (la variante la plus utilisée dans les exercice est sans doute "la fonction tend vers* $+\infty$ *en* 0 *donc l'intégrale diverge").*

Ainsi, cet exercice peut servir d'introduction aux séries, en invitant les étudiants à réfléchir, après coup, à ces deux obstacles.

Monsieur Sierpinski avait ramené d'un voyage en Orient un tapis carré de 1 mètre de côté dont il était très content. Jusqu'au jour où les mites s'introduisirent chez lui.

En 24 heures, elles dévorèrent dans le tapis un carré de côté trois fois plus petit, situé exactement au centre du tapis. En constatant les dégats, Monsieur Sierpinski entra dans une colère noire ! Puis il se consola en se disant qu'il lui restait huit petits carrés de tapis, chacun de la taille du carré disparu. Malheureusement, dans les 12 heures qui suivirent, les mites avaient attaqué les huit petits carrés restants : dans chacun, elles avaient mangé un carré central encore trois fois plus petit. Et dans les 6 heures suivantes elles grignotèrent encore le carré central de chacun des tout petits carrés restants. Et l'histoire se répéta, encore et encore ; à chaque étape, qui se déroulait dans un intervalle de temps deux fois plus petit que l'étape précédente, les mites faisaient des trous de taille trois fois plus petite...

Question 1.

Faire des dessins pour bien comprendre la géométrie du tapis troué. Calculer le nombre total de trous dans le tapis de Monsieur Sierpinski après n étapes. Calculer la surface S_n de tapis qui n'a pas encore été mangée après n étapes. Trouver la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$. Que reste-t-il du tapis à la fin de l'histoire ?

Question 2.

Calculer la durée totale du festin "mitique"...
