Exercices Alternatifs

Approximations affines

©2007 Frédéric Le Roux (copyleft LDL : Licence pour Documents Libres).
Source: `approximations-affines.tex`.
Version imprimable: `approximations-affines.pdf`
Fonctions de plusieurs variables réelles. DEUG première année. Angle pédagogique : *À quoi ça sert.*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice classique montre comment on peut utiliser la formule de Taylor pour estimer les petites variations d'une fonction de deux variables, dans des cadres très concrets. Les trois premières questions utilisent la formule à l'ordre* 1*, la dernière à l'ordre* 2*. La question sur le cône est plus difficile parce qu'elle utilise la notion d'incertitude relative.*

Question 1. Petites variations de la diagonale d'un carré

a. Donner l'expression de la diagonale $d(x, y)$ d'un rectangle de côtés x et y.

b. On considère un rectangle de côtés $x = 30cm$ et $y = 40cm$. En utilisant l'approximation affine de d (c'est-à-dire en négligeant le reste dans la formule de Taylor), donner une estimation de la variation de d lorsque x augmente de 4mm et y diminue de 1mm (sans utiliser la calculatrice !). Calculer la longueur de la nouvelle diagonale à la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

Question 2. Petites variations de la surface d'une boîte

On considère un container en carton de volume $1m^3$, dont la base a pour dimension $x = 2m$ et $y = 1m$. On veut fabriquer un deuxième container en carton de même volume, avec une base de côtés 195cm et 95cm. Donner (sans calculatrice) une estimation de la différence de surfaces extérieures entre les deux containers à l'aide l'approximation affine. Calculer la nouvelle surface à l'aide de la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

Question 3. Petites variations du volume d'un cône

On mesure le rayon r et la hauteur h d'un cône, avec une incertitude de 3% sur le rayon, et de 2% sur la hauteur. Évaluez l'incertitude sur le volume $V(r, h) = \pi r^2 h/3$ du cône, à l'aide de l'approximation affine.

Question 4. Approximation quadratique

La surface $S(x, y)$ d'un container en carton de volume $1m^3$ dont la base a pour dimension x, y est la fonction

$$S(x, y) = 2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}.$$

On considère le container de volume $1m^3$ dont la base a les dimensions $x = 1m$ et $y = 1m$ (c'est donc un cube). On veut estimer la variation de surface lorsque le côté x augmente de $5cm$, et le côté y diminue de $10cm$.

a. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 1 au point $(1, 1)$. Peut-on en déduire une estimation de la variation ?

b. Répondre au problème en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, et en supposant que le reste est négligeable devant les autres termes.

c. Calculer la variation à la calculatrice, et comparer avec votre estimation.
