Exercices Alternatifs

La guerre des caramels n'aura pas lieu.

Source: `caramels.tex`.
Version imprimable: `caramels.pdf`
Algèbre linéaire. DEUG première année. Angle pédagogique : *Ludique.*

Objectifs et commentaires. *Dans cet exercice, on résoud d'abord un système linéaire sur les entiers, on en déduit qu'il a une solution unique sur les rationnels, et donc sur $\mathbb{R}$ grâce au déterminant.*

Cet exercice donne un exemple ludique où on peut utiliser le déterminant (sans pouvoir le calculer) pour résoudre un problème concret.

Cet exercice est inspiré par le problème les caramels *d'*Elisabeth Busser *et* Gilles Cohen *paru dans la rubrique* Affaire de logique *du monde du 13 août 2002.*

Question 1. Les caramels de Grand-Mère

Grand-Mère vient de confectionner ses ineffables caramels. Elle les répartit amoureusement en 15 sachets, pour ses 14 petits enfants (7 garçons et 7 filles) et pour son singe savant, Machiavel. Grand-Mère a la vue basse est elle n'est pas sûre d'avoir mis autant de caramels dans chaque paquet.

Machiavel, qui s'ennuie un peu, aimerait se divertir en semant la zizanie entre le clan des garçons et celui des filles. Il sait que les petits enfants sont tellement friands des caramels que si les garçons n'ont pas, au total, exactement le même nombre de caramels que les filles, la bagarre éclatera entre les deux clans. Machiavel se dépêche donc d'aller dans le placard pour choisir son paquet de caramels. Malheureusement pour lui, quel que soit le paquet qu'il choisisse, Grand-Mère pourra toujours attribuer judicieusement les paquets restants à ses petits enfants afin que la répartition entre le clan des filles et celui des garçons soit équitable.

Question : est-ce que les 15 sachets de caramels contiennent forcément tous le même nombre de caramels ?

Indications. Étudier la parité des nombres de caramels, puis raisonner par récurrence.
[1]

Question 2. Les caramels en morceaux

Grand-Mère a encore fait des caramels. Mais cette fois ci, certains caramels se sont brisés. Notons que les caramels de Grand-Mère sont extraordinaires puisque lorsque l'un deux se casse en morceaux, les morceaux résultant sont toujours tous égaux (mais certains caramels se brisent en plus de morceaux de d'autres). Par exemple, Si un caramel se brise en 17 morceaux, chaque morceau fait précisément 1/17ème de caramel. Grand-Mère, qui a toujours la vue basse, n'a pas reconstitué les caramels, et elle a pu égarer quelques morceaux avant de remplir les quinze sachets pour ses petits enfants et le singe savant. Chaque paquet de caramel se retrouve ainsi avec des caramels et des fractions de caramels.

[1] Les paquets ont tous le meme nombre de caramels modulo 2. Si ils sont tous pairs, diviser par 2. Si ils sont tous impairs, retrancher 1. Ce processus ne s'arrete que si tous les nombres de caramels sont nuls.

Machiavel, qui n'a pas changé d'idée, va encore dans le placard. Mais encore une fois, la chance joue contre lui, et quel que soit le paquet qu'il choisisse, il ne pourra pas déclencher la guerre des caramels.

Question : est-ce que les 15 sachets de caramels contiennent forcément tous le même nombre de caramels ?

Indication. Ramener le problème à un problème de caramels entiers.

Question 3. Le caramel liquide

Grand-Mère a cette fois-ci préparé du caramel liquide, et elle remplit 15 fioles pour Machiavel et les 14 petits-enfants. Bien entendu, elle n'est pas sûre d'avoir rempli les fioles de la même quantité de caramel. Et là encore, quelle que soit la fiole choisie par Machiavel, la famille gardera son ambiance paisible.

Question : est-ce que les 15 fioles contiennent forcément toutes la même quantité de caramel ?

Indication. Utiliser la solution du problème des caramels en morceaux pour en déduire quelque-chose sur le déterminant d'un système d'équations.

Question 4. Des caramels aux théorèmes

Reprendre la question 2 et essayer de trouver de trouver un énoncé de théorème — donnant un lien entre les solutions entières et rationnelles d'un système — qu'on pourrait démontrer avec la même méthode.

Même question pour la question 3.