Introduction à l'algèbre linéaire : les carrés magiques d'ordre 3

Source: `carres-magiques.tex`.

Version imprimable: `carres-magiques.pdf`

Algèbre linéaire. DEUG première année. Angle pédagogique : *Découverte.*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Cet exercice est destiné à être posé au tout début du cours d'algèbre linéaire, voire avant le cours. On tente d'introduire "naturellement" certaines des notions-clés, comme la définition d'espaces vectoriels, les bases (et l'existence de bases distinctes), la notion de somme directe, les applications linéaires... Remarquons que l'espace vectoriel des carrés magiques a un avantage (pédagogique) sur les espaces $\mathbb{R}^n$ ou sur l'espace des polynômes : il n'a pas de base canonique.*

Cet exercice est fortement inspiré d'un devoir donné à l'université de Lille, que l'on trouve dans l'annexe 7 du texte de Marc Rogalski, Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année, *(cahier de DIDIREM 11, octobre 91). On lira d'ailleurs avec profit ce texte d'une trentaine de pages qui présente un enseignement pensé dans sa globalité ("ingénieurie longue"), ce qui n'empèche pas d'en extraire des petits morceaux...*

Il s'agit d'une activité de découverte de nouvelles notions, et il est difficile de rédiger un sujet sans interventions d'un professeur... On a donc signalé par le symbole (*) tous les endroits qui nécessite quelques commentaires. Voici des commentaires sur ces commentaires, dans l'ordre d'apparition du texte :

1. *On espère que les étudiants auront trouvé les carrés magiques constants, et au moins un autre (on peut éventuellement faire intéragir tous les groupes d'étudiants pour cela). Introduire ici la notion de somme, de produit extérieur (d'autres idées peuvent apparaitre, à l'aide de symétries par exemple : elles pourraient déboucher sur l'idée d'application linéaire, mais il vaut sans doute mieux les laisser tomber pour le moment...). Remarquer que l'on définit des nouvelles opérations (très simples), sur l'ensemble des carrés magiques E. Introduire le terme* espace vectoriel, *si le cours correspondant n'a pas déjà été fait. On peut aussi parler de* combinaison linéaire. *Faire remarquer que l'on n'est pas sûr d'avoir trouvé tous les carrés magiques...*
2. *La question n'est pas très facile à faire comprendre, et il faudra peut-être la reformuler ; on espère trouver des schémas du type*

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & b & c \\ ? & e & ? \\ ? & ? & ? \end{array}}$$

ou bien

$$\boxed{\begin{array}{ccc} a & b & ? \\ ? & e & ? \\ ? & ? & i \end{array}}$$

3. *Simple vérification des résultats.*
4. *Idem.*

Quand vous rencontrez le symbole (*), appelez le professeur et expliquez-lui vos résultats.

I. Définition, objectifs

Dans cet exercice, on appellera *carré magique* un tableau carré contenant 9 nombres réels, tel que les sommes des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales soient égales :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

avec

$$\begin{array}{ccc} a+b+c=S & a+d+g=S & a+e+i=S \\ d+e+f=S & \dots & c+e+g=S \\ g+h+i=S & \dots & \end{array}$$

où le nombre S s'appelle *la somme* du carré. [1]

Le but de l'exercice est de trouver *tous* les carrés magiques.

Sur le plan pédagogique, l'exercice est en quelque sorte un prétexte pour introduire dans ce cadre certaines des notions-clés de l'algèbre linéaire : *espaces vectoriels, bases, dimension, sommes directes, applications linéaires.* [2] Notamment, on n'essaiera pas de résoudre le problème de la manière la plus simple ou la plus courte, on tentera plutôt de bien comprendre les propriétés des objets étudiés.

Plus précisément, voici une stratégie possible : le problème revient à résoudre un système de 8 équations linéaires à 10 inconnues, et on a des méthodes pour faire ça. Mais ça n'est pas très agréable : avec un peu d'astuce et de réflexion, on va essayer de diminuer le nombre de calculs.

II. Fabrication de quelques carrés magiques

Question 1. Premiers exemples

Trouvez des exemples de carrés magiques les plus simples possibles. Essayez d'obtenir deux exemples "les plus différents possibles".

Question 2. Machines à fabriquer de nouveaux exemples

Comment peut-on obtenir de nouveaux exemples à partir de carrés magiques connus ? Essayez de trouver le plus possible de tels procédés.

(*)

III. Une réduction du problème

Question 1. Décomposition

Montrer que tout carré magique peut se décomposer comme somme d'un carré magique constant et d'un carré magique de somme nulle.

Question 2. Unicité

Montrer que cette décomposition est unique.

[1] Les amateurs de casse-tête rajoutent d'autres types de conditions, ce qui change radicalement la nature du problème (et le rend bien plus difficile).

[2] Les notions introduites ici de manière un peu floue seront précisées en cours.

Question 3.

Vérifiez que ces deux sous-ensembles de carrés magiques sont aussi des espaces vectoriels (on dit que ce sont des *sous-espaces vectoriels* de l'espace vectoriel E des carrés magiques).

On traduit les propriétés de cette partie en disant que *l'espace vectoriel des carrés magiques est la somme directe du sous-espace formé des carrés de somme nulle et du sous-espace formé des carrés constants.*

En quoi ceci permet-il de simplifier le problème ? Formuler cette simplification le plus précisément possible.

IV. Résolution

On va chercher maintenant à déterminer tous les carrés magiques de somme nulle (répétons-le, en évitant de résoudre un "gros" système d'équations).

Question 1.

En pratique, quand on essaie de construire un carré magique (de somme nulle), on commence par remplir quelques cases par des valeurs arbitraires (il y a bien sûr énormément de choix possibles), puis, au bout d'un moment, on n'a plus du tout le choix : la suite du remplissage du carré est entièrement déterminée par les valeurs choisies dans les premières cases. Donnez un ou plusieurs exemples de remplissages de quelques cases du carré qui forcent ainsi toute la suite du remplissage du carré.

(*)

Question 2.

Choisir l'un des schémas trouvés à la question précédente, et compléter dans le carré les cases restantes en fonction des cases présélectionnées. Obtient-on toujours ainsi un carré magique de somme nulle ? Sinon, que faut-il rajouter ?

Question 3.

À partir de la question précédente, exprimer tous les carrés magiques de somme nulle à partir de quelques carrés particuliers.

En déduire l'ensemble de tous les carrés magiques, sous la même forme.

(*)

V. Encore quelques notions d'algèbre linéaires

Question 1. Bases et dimension

a. Combien faut-il de coefficients, au minimum, pour exprimer l'ensemble des carrés magiques ?

Ce "nombre minimum de paramètres à utiliser pour décrire un espace vectoriel" s'appelle la *dimension* de l'espace vectoriel. Donner de même la dimension du sous-espace vectoriel des carrés magiques constants, puis celle des carrés magiques de somme nulle.

b. Les carrés magiques particuliers utilisés à la question 3 pour décrire l'ensemble de tous les éléments de l'espace vectoriel forment *une base* de l'espace vectoriel (à condition toutefois qu'on en ait pris le moins possible).

Quel lien y a-t-il entre une base et la dimension ?

Un espace vectoriel peut-il avoir plusieurs bases différentes ?

Voyez-vous des liens entre la somme directe et les bases ?

(*)

VI. En guise de conclusion

A quoi sert l'algèbre linéaire ? Malheureusement, il n'y a pas de réponse simple au niveau DEUG : en effet, la plupart des problèmes pour lesquels on va utiliser l'algèbre linéaire peuvent aussi se résoudre de manière élémentaire, la plupart du temps en resolvant un système d'équations ; et ceci peut donner l'impression qu'on remplace des calculs fastidieux mais simples par des arguments et des concepts très compliqués, très abstraits : donc, l'utilité en tant qu'*outil* n'est pas très claire (en DEUG en tout cas !)

On peut quand même faire sentir l'intérêt de l'algèbre linéaire : celle-ci permet d'*unifier* des problèmes et des situations a priori très différentes, en donnant un cadre général dans lequel ces problèmes vont avoir le même aspect. Une telle démarche s'appelle *la méthode axiomatique*, et est fondamentale dans les mathématiques récentes.

Plus précisément, on commence par remarquer que l'on sait additionner deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ou deux fonctions, ou deux polynômes, ou deux suites de réels (comment ?...), ou deux carrés magiques ; et qu'on sait aussi multiplier chacun de ces objets par des réels.

Puisque ces objets (différents) peuvent subir le même type d'opération, ayant les mêmes propriétés formelles, les raisonnements ou les concepts qui utilisent uniquement ces opérations vont être valables dans chacun des cinq cadres cités. Par exemple, les notions de droite, de plan, de repère (on dira *base*), que l'on connait déjà dans $\mathbb{R}^3$, vont aussi être valables pour des espaces de fonctions ou de polynômes ! La propriété qui dit que "dans $\mathbb{R}^3$, deux plans ont toujours une droite en commun" deviendra ainsi "dans tout espace vectoriel de dimension 3, deux sous-espaces vectoriel de dimension 2 ont toujours un sous-espaces de dimension 1 en commun" et sera vraie quelle que soit la nature des éléments de l'espace vectoriel (fonctions, polynômes, suites, carrés magiques ou autres ; et on pourra d'ailleurs la généraliser à des dimensions supérieures).

Ce point de vue donne également un support géométrique, et permet de visualiser les objets : dans l'exercice, l'ensemble des carrés magiques s'avère être un espace vectoriel de dimension 3, ce qui permettra d'y faire exactement les mêmes opérations et les même raisonnements que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, que l'on "voit" beaucoup mieux que l'espace des carrés magiques.

Même si le DEUG n'en donne qu'un tout petit aperçu, la quantité de situations qui peuvent être modélisées par l'algèbre linéaire est immense, et va de questions purement mathématiques jusqu'à des problèmes très concrets d'écologie (dynamique des populations), de météorologie, d'économie, de physique...