Exercices Alternatifs

# Compacité



Source: `compacite.tex`.

Version imprimable: `compacite.pdf`

*Topologie. DEUG deuxième année.* Angle pédagogique : *Découverte.*

Objectifs et commentaires. *Faire comprendre aux élèves un des intérêts de la notion de compacité pour les parties du plan (dans la version "fermé-borné") ; faire appliquer le théorème sur les fonctions continues sur les compacts dans un cadre géométrique, et voir la nécessité de l'hypothèse de compacité. On suppose que les étudiants connaissent cette définition des compacts, ainsi que le théorème.*

---

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. On note $\Delta$ l'axe des abscisses. Si $M = (x, y)$ est un point du plan, on note $d(M, \Delta)$ la distance de $M$ à $\Delta$.

**Question 1.**

**a.** Donner une formule pour $d(M, \Delta)$.

**b.** Soit maintenant $E$ une partie du plan. Comment définiriez-vous la distance de $E$ à $\Delta$ ? On la note $d(E, \Delta)$.

**c.** Trouvez un exemple d'ensemble $E$ disjoint de $\Delta$, mais vérifiant pourtant $d(E, \Delta) = 0$.

**d.** Probablement, l'exemple que vous avez trouvé n'est pas un ensemble fermé. Trouvez un autre exemple qui soit de plus un ensemble fermé.

**e.** Montrer que *si $E$ est compact*, alors le paradoxe précédent ne peut pas arriver : autrement dit, montrer que tout ensemble compact disjoint de $\Delta$ vérifie $d(E, \Delta) > 0$).

**Question 2.**

Y a-t-il toujours un point $M$ de $E$ qui "réalise la distance à $\Delta$", c'est-à-dire tel que $d(M, \Delta) = d(E, \Delta)$ ? Trouvez des contre-exemples ; montrez que la réponse est affirmative si $E$ est compact.

---