Dessiner le crocodile : visualisation de la multiplication complexe

Sources et figures: `crocodile/`.
Version imprimable: `crocodile.pdf`
Nombres complexes. DEUG première année. Angle pédagogique : *Visualisation.*

Objectifs et commentaires. *L'image d'un crocodile par l'application $z \mapsto z^2$ est un crocodile qui se mord la queue, manière visuelle percevoir la non-injectivité. Cet exercice est inspiré du début du film d'Adrien Douady sur la dynamique du lapin, où Adrien explique sans formule, graphiquement, la fonction $z \mapsto z^2 + c$.*

On peut faire placer des points de l'image du croco au fur et à mesure des questions 1 et 2.

On voudrait comprendre "quel effet cela fait à un nombre complexe de se faire élever au carré". Pour ça, on cherche à dessiner l'image du crocodile par l'application φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2. \end{array}$$

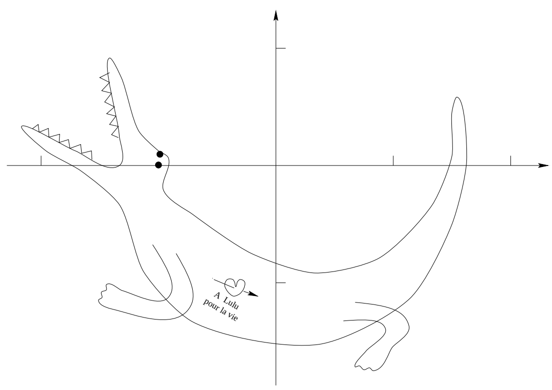

Fig. 1:

a. Ecrire les parties réelles et imaginaires de z^2 en fonction de celles de z, puis le module et l'argument de z^2 en fonction de ceux de z. Commentaire ?

b. Dessiner une demi-droite issue de 0 et son image par φ.

c. Quelle est l'image d'un cercle centré en 0 ? Placer aussi les images de quelques points particuliers du cercle.

d. "Dessiner l'image du crocodile".

e. "Comment voit-on que l'application n'est pas injective ?"

f. Dessiner l'image réciproque du crocodile (attention, il y a un piège...).

g. (plus facile) Dessiner de même l'image du croco par $z \mapsto z + 1 + 2i$, $z \mapsto (\sqrt{3} + i)z$.
