.

Des Dominos en Série

Source: `dominos-en-series.tex`.
Version imprimable: `dominos-en-series.pdf`
Séries. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *Visualisation.*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Visualiser la série harmonique (somme des inverse des entiers) ; voir un contexte physique où elle apparaît, et où sa divergence à une signification : on peut construire une pile de domino avec un porte-à-faux aussi grand qu'on veut (en théorie...) En pratique, même si la divergence de la série est très lente, on arrive à obtenir un décalage d'une longueur supérieure à celle d'un domino, ce qui est déjà spectaculaire (si vous n'avez pas de domino, un jeu de cassettes audio homogène fait très bien l'affaire !)*

On peut sans doute donner cet exercice en introduction aux séries, avant qu'elles aient été abordées en cours (la divergence de la série est très facile à montrer en regroupant les termes entre n et $2n$).

Question subsidiaire : combien faut-il de dominos, au minimum et en théorie, pour avoir un décalage de 1 dominos ? Comparer à la pratique. Combien faut-il de dominos pour avoir un décalage de 10 dominos ? On peut répondre à ces questions par une estimation sur machine, ou bien en utilisant la comparaison entre la série et une intégrale.

Remarque : c'est un exercice difficile ; le plus simple est sans doute de raisonner en partant du haut de la pile, et de calculer par récurrence l'emplacement du centre de gravité des k dominos du dessus dans la position limite.

On peut aussi obtenir une solution "qualitative" : supposons que la pile de dominos est constituée de sous-piles exactement verticales (sans aucun porte-à-faux), le porte-à-faux ne provenant que du décalage entre deux sous-piles successives. Notons n_1, n_2, etc. le nombre de dominos de chaque sous-pile (en partant du haut). Alors si chaque n_k est assez grand devant la somme des n_i précédents, le décalage entre deux sous-piles successives peut être choisi égal à $1/4$. Ceci prouve que l'on peut obtenir un décalage total arbitrairement grand. Il s'agit là de la preuve la plus courte, probablement pas la plus facile à comprendre...

Une dernière remarque : on montre dans cet exercice qu'on peut atteindre un porte-à-faux arbitrairement grand ; cependant, il n'existe sans doute pas de pile de dominos, constituée d'un infinité de dominos satisfaisant aux conditions d'équilibre, avec un porte-à-faux infini. Ceci demanderait une preuve !

Cet exercice est extrait de La physique en question, Mécanique, *J.-M. Lévy-Leblond, éditions Vuibert (question 13).*

Zazie joue avec ses dominos. Elle veut les empiler l'un sur l'autre en surplomb, chaque domino dépassant celui sur lequel il est posé, de façon a construire une pile aussi inclinée que possible. Quel est le nombre maximal de dominos, et quel est le porte-à-faux maximal (distance horizontale entre le domino supérieur et le domino inférieur) que l'on peut atteindre en principe sans que la pile s'effondre ?

Suggestion : à quelle condition le dernier domino de la pile (celui du haut) est-il en équilibre sur l'avant-dernier ? Dans cette position, à quelle condition ces deux-là sont-ils en équilibre sur l'avant-avant-dernier, etc. ?
