Exercices Alternatifs

Construction de fractales géométriques

Source: `fractales.tex`.

Version imprimable: `fractales.pdf`

Fractales. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *Découverte.*

Objectifs et commentaires. *Voir plus bas...*

Ceci n'est pas à proprement parler un exercice, mais un ensemble d'exercices qui ont été utilisés dans le cadre d'un stage "de transition DEUG-Licence" (oups, je veux dire "de transition L2-L3").

Nous avons pris pour prétexte la construction d'une famille d'ensembles fractals dans le plan, les ensembles-limite des *systèmes de fonctions itérés* ou *IFS*. Il s'agit d'un procédé général qui permet de construire une infinité de fractales, dont les fractales géométriques classiques (flocon de neige, tapis ou triangle de Sierpinski, ensemble de cantor, fougère, arbre, éponge de Menger...).

On peut se faire rapidement une idée du contenu du stage en visitant ce très joli site (regarder notamment les rubriques 1.E et 1.F, "Iterated functions systems" et "Inverse problems").

Pour un mathématicien professionnel, le fractal est obtenu facilement comme point fixe d'un procédé contractant dans un espace métrique complet (en l'occurrence, il s'agit de l'espace des compacts du plan, muni de la distance de Hausdorff). Pour les étudiants, nous avons passé deux semaines à introduire le procédé, à prouver l'existence d'un ensemble-limite "à la main", puis à montrer l'unicité de l'ensemble-limite (qu'on parte d'un clown ou d'un triangle, on converge vers le triangle de Sierpinski, voir par exemple notre feuille II.2).

> Voici le point important : *toutes les activités techniques étaient motivées par notre histoire de fractales.* La motivation principale était de donner un sens aux ensembles-limite qu'on voit apparaître quand on itère un certain procédé. On espère que ce point de vue aide à donner un sens aux manipulations abstraites d'objets formels, sans lesquelles on ne peut pas faire de maths.

Cette histoire permet de manipuler un certain nombre de techniques :

- de la théorie des ensembles, par exemple des unions et intersections infinies (feuille I notamment) ;
- des applications linéaires du plan de manière très visuelle, un exemple de décomposition simple motivée par des logiciels java (feuille II) ;
- les propriétés des similitudes (feuille II) ;
- des nombres complexes (pratiques pour décrire et démontrer des propriétés des similitudes, feuilles II et IV) ;
- de la topologie, la notion de limite, un exemple d'espace métrique naturel mais très différent des espaces euclidiens, les notions de bases : ouverts, fermés, adhérence...(feuilles III et IV) ;

- une suite réelle définie par récurrence à l'aide d'une fonction contractante, comme exemple simple analogue à notre procédé de construction de fractales (feuille IV.2) ;
- une introduction au théorème du point fixe contractant ;
- des équations différentielles, et comment un procédé contractant permet de démontrer l'existence et l'unicité des solutions sur des exemples (feuille IV.5), ce qui donne une introduction à la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz ;
- les paradoxes de l'infini, et la notion de dénombrabilité (à travers l'histoire de l'Hotel de Hilbert, feuille V).

Le "quizz" donné à la fin du stage donne une idée de quelques points techniques précis qui ont été abordés.

Les 60 pages distribuées aux étudiants au cours du stage sont disponibles ici.
