Exercices Alternatifs

Graphes et lignes de niveau des fonctions de deux variables

Sources et figures: `graphes-deux-variables/`.

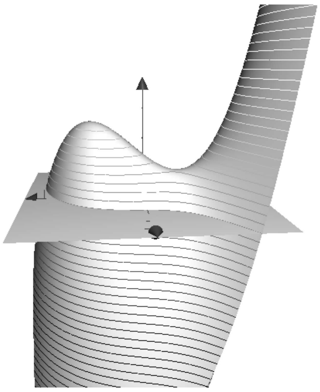
Version imprimable: `graphes-deux-variables.pdf`

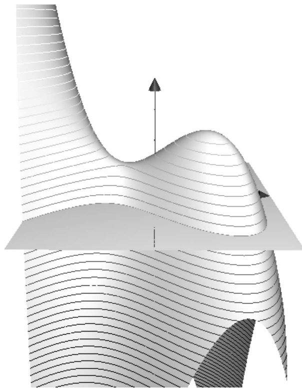
Fonctions de plusieurs variables réelles. DEUG première année. Angle pédagogique : *Découverte.*

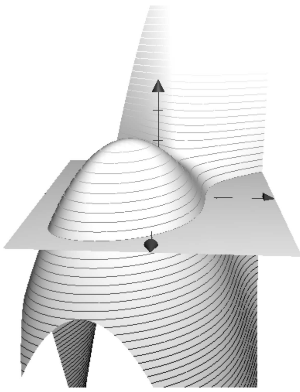
Objectifs et commentaires. *Cet exercice peut servir d'introduction aux fonctions de plusieurs variables, et notamment à leurs représentations graphiques sous forme de graphe et de lignes de niveaux (* avant *tout cours sur le sujet). Il devrait aider les étudiants à se forger une image mentale de ce qu'est une fonction de deux variables.*

I. La presqu'île

Les trois dessins ci-dessous représentent des vues en relief d'une presqu'île, avec le plan du niveau de la mer. Les vues sont orientées respectivement vers le Nord, l'Ouest, et le Sud. On a représenté les lignes de niveaux d'altitude 0m, 25m, 50m, *etc.* (le sommet est situé à une altitude d'environ 250m).







Question 1. Lignes de niveau

a. Dessiner, en vue du dessus, l'allure de la ligne de niveau 0 (ensemble des points de la presqu'île situés à l'altitude 0). On utilisera le cadre fourni.

b. Même question pour la ligne de niveau 100m, puis pour la ligne de niveau 200m (sur le même dessin).

Question 2. Profils du relief

a. Dessiner le profil du relief le long d'un itinéraire Sud-Nord passant par le sommet de la presqu'île.

b. Même question pour un itinéraire passant au dessus de l'axe Nord-Sud représenté sur les dessins. Même question pour un itinéraire passant par le col de la presqu'île.

c. (optionnelle) Sur un autre dessin, représenter le profil du relief le long d'un itinéraire Ouest-Est passant au dessus de l'axe Ouest-Est représenté.

En fait, la surface dessinée ci-dessus est le graphe de la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}.$$

Ceci signifie :

- qu'on a muni l'espace d'un repère orthonormé $(Oxyz)$,
- et qu'on a représenté *l'ensemble des points* (x,y,z) *de l'espace tels que* $z = f(x,y)$.

L'axe (Oz) est dirigé vers le haut, l'axe (Ox) vers l'Est, et l'axe (Oy) vers le Nord.

Question 3.

a. Étiqueter les axes ('x', 'y' ou 'z') sur les trois dessins de l'énoncé.

b. Tracer les axes sur les deux dessins des questions 1 et 2, et les étiqueter.

Question 4.

a. Sachant que x, y et z sont exprimés en centaines de mètres, donner l'altitude du point de la presqu'île d'abscisse $x = 0$ et d'ordonnée $y = 0$.

b. Positionner ce point sur chacun des dessins précédents.

c. (optionnelle) Mêmes questions pour le point correspondant à $x = 0$ et $y = 1$.

Question 5.

a. La ligne de niveau 0 dessinée à la question **1.a** est un ensemble de points dans le plan des variables x et y. Quelle est l'équation de cet ensemble ?

b. Exprimez cette équation à l'aide de la fonction f.

c. Mêmes questions pour la ligne de niveau 100m.

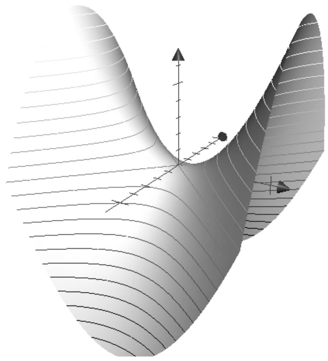
Question 6.

a. Le profil du relief au-dessus de l'axe Nord-Sud, dessiné à la question **2.b**, est un ensemble de points dans le plan des variables y et z. Quelle est l'équation de cet ensemble ?

b. Exprimez cette équation à l'aide de la fonction f.

c. En déduire l'altitude du point culminant de cet itinéraire. Vérifier graphiquement.

II. La selle de cheval



Le dessin montre le graphe de la fonction définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$. On a représenté les lignes de niveau d'altitudes entières $(0, 1, 2, ...)$.

Question 1. Lignes de niveau

a. Indiquer sur le dessin les trois courbes correspondant respectivement aux niveaux -1, 0, 1.

b. Donner l'équation de la ligne de niveau 1. En s'aidant du dessin fourni, représenter cette ligne de niveau (dans le plan des variables x et y).

c. Mêmes questions pour la ligne de niveau 0. En exprimant x en fonction de y, montrer par le calcul que cette ligne est la réunion de deux droites.

Question 2. Fonctions partielles

a. Donner l'expression de la fonction partielle $\varphi : x \mapsto f(x, 0)$. Dessiner son graphe (dans le plan des variables x et z). Représenter la courbe correspondante sur le dessin en trois dimensions.

b. Mêmes questions pour la fonction partielle $\psi : y \mapsto f(-1, y)$.

Nord

1.a et b Ouest Est

Sud

Haut

2.a et b Sud Nord

Bas