Exercices Alternatifs

Introduction à la notion d'axiome

Source: `groupes.tex`.

Version imprimable: `groupes.pdf`

Groupes, et autres stuctures algébriques. DEUG première année. Angle pédagogique : *Découverte.*

Objectifs et commentaires. *Ce TD est plutôt conçu comme étant préparatoire à un cours, de façon à amener le plus naturellement possible la notion d'axiome. Il semble que le statut des axiomes déstabilise beaucoup les étudiants lorsqu'on entame l'algèbre linéaire, d'autant plus qu'un espace vectoriel est une superposition de plusieurs structures qu'on leur ¡¡ parachute ¿¿ en une seule définition...*

I. Expériences

Les deux premières questions sont deux variantes du même problème mathématique.

Question 1. Inspiration musicale

soit $\mathcal{G} = \{\text{do,ré,mi,fa,sol,la,si}\}$ la gamme musicale. On s'intéresse aux intervalles (écarts de notes) : par exemple, la tierce — en dépit de son nom — est un écart de *deux* notes. Nous allons regarder la tierce comme une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$, qui ¡¡ décale ¿¿ de deux notes, et on la notera *tierce*. Ainsi on a *tierce*(do) = mi. Les autres intervalles de la gamme sont désignés ci-dessous :

la *seconde* : écart de 1 note
la *tierce* : écart de 2 notes
la *quarte* : écart de 3 notes
la *quinte* : écart de 4 notes
la *sixte* : écart de 5 notes
la *septieme* : écart de 6 notes
la *unisson* : un écart de 0 note est parfois appelé *unisson.*

On ne tient pas compte de l'*octave*, écart de 7 notes, c'est-à-dire qu'on considère comme égales une note, et elle-même plus une octave. On a obtenu un ensemble $G = \{\mathit{unisson}, \mathit{seconde}, \mathit{tierce}, \mathit{quarte}, \mathit{quinte}, \mathit{sixte}, \mathit{septieme}\}$, sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathcal{G},\mathcal{G})$. On peut donc composer les éléments de G, en tant qu'applications.

a. Calculez $\mathit{tierce} \circ \mathit{quarte}$, $\mathit{quarte} \circ \mathit{tierce}$, $\mathit{seconde} \circ \mathit{septieme}$, $\mathit{sixte} \circ \mathit{quinte}$.

b. Montrez que quand on compose deux éléments de G, le résultat est encore un élément de G. On dit que G est *stable* pour l'opération $\circ$.

c. Si $x \in G$, on note x^2 pour $x \circ x$, x^3 pour $x \circ x \circ x$, etc. Montrez que pour tout $x \in G$, on a $x^7 = \mathit{unisson}$.

Question 2. Inspiration complexe

soit $H = \{\, e^{2ik\pi/7} \mid k \in \mathbf{Z} \,\}$.

a. Montrez que $\mathrm{card}(H) = 7$, et que H est stable pour la multiplication.

b. Montrez que $\forall z \in H, \quad z^7 = 1$.

Question 3. Symétries du pentagone régulier

Trouvez toutes les isométries du plan qui laissent le pentagone régulier invariant (on admettra qu'il n'y en a que 10). Leur ensemble est noté G.

a. Montrez que si on prend s et t deux telles isométries, alors $s \circ t$ en est encore une.

b. Montrez que $\forall s \in G, \quad s^{10} = \mathrm{id}$.

II. ¡¡ Axiomatisation ¿¿

On remarque que les résultats des exercices 1 et 2 se ressemblent. C'est là le début de la démarche axiomatique : lors de démonstrations (sur des cas particuliers) mettant en jeu certains objets (dans nos exemples, les ensembles G ou H), on essaie d'identifier précisément quelles sont les propriétés essentielles qui ¡¡ font que ça marche ¿¿ . On formule ensuite une définition abstraite qui englobe le cas de nos objets G ou H, dans laquelle les propriétés nécessaires sont appelées axiomes.

Cette démarche est au coeur des maths modernes - depuis le 19ème siècle. Elle est difficile car il n'est pas aisé d'identifier les propriétés en question, celles qui seront ¡¡ les bonnes ¿¿ pour le mathématicien. Par exemple, la notion de groupe *que nous présentons maintenant est née en presque un siècle. Galois, dans les années 1820, l'a pressentie via des ensembles de permutations (bijections d'un ensemble fini) ; puis Cayley et d'autres ont étudié des groupes vers 1880, sous l'aspect d'automorphismes d'espaces linéaires. Mais ce n'est qu'au début du vingtième siècle que la définition a été formulée une fois pour toutes, et fixée telle que nous la connaissons aujourd'hui.*

En regardant les exercices précédents on arrive à énoncer une définition :

Définition : *Un* groupe *est un ensemble G avec une application appelée* loi de composition *et notée*

$$\begin{array}{rccc} * : & G \times G & \to & G \\ & (g,h) & \mapsto & g * h \end{array}$$

tels que

(N) *il existe un élément e appelé* neutre *vérifiant* $\forall x \in G,\ e * x = x * e = x$.

(A) *la loi $*$ est* associative, *c'est-à-dire* $\forall (x,y,z) \in G^3,\ (x*y)*z = x*(y*z)$.

(I) *tout élément de G a un (unique)* inverse *:* $\forall x \in G,\ \exists y \in G,\ x * y = y * x = e$.

Presque tout le temps, l'inverse de x est noté x^{-1}. De même on écrit x^2 pour $x * x$, et x^0 désigne le neutre e. On peut donc définir x^i pour n'importe quel entier $i \in \mathbf{Z}$.

Question 1. Exemples

Montrez que les ensembles des exercices 1 et 2, munis de leurs lois, sont des groupes.

D'autres exemples sont l'ensemble des réels, muni de l'addition, ou l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Attention : $\mathbf{N}$ muni de l'addition n'est pas un groupe ! On voit sur ces exemples qu'un groupe peut être de cardinal fini, ou non. On va maintenant, pour cet objet général qu'est le *groupe*, démontrer un résultat semblable à celui des exercices de départ :

Soit G un groupe fini à n éléments ($n \geq 1$). Alors, pour tout $x \in G$, on a $x^n = e$.

III. Démonstrations

Question 1. un cas simple

Dans cet exercice on suppose de plus que le groupe est *commutatif*, c'est-à-dire que l'on suppose

$$\forall (x, y) \in G,\ x * y = y * x\ .$$

a. Soit $x \in G$ fixé. Montrez que l'application $f_x : G \to G$ telle que $f_x(g) = g * x$, est une bijection. Donnez sa bijection réciproque.

b. Expliquez pourquoi cela a un sens de parler du ¡¡ produit ¿¿ $g_1 * \cdots * g_n$ de tous les éléments de G, dans n'importe quel ordre.

c. Montrez que $g_1 * \cdots * g_n = (g_1 x) * \cdots * (g_n x)$. Déduisez-en que $x^n = e$.

Question 2. cas général

Dans cet exercice on ne suppose plus que G est commutatif (cf question précédente). Par ailleurs, pour alléger la notation, on désormais xy au lieu de $x * y$.

a. En considérant la suite $1, x, x^2, \ldots$, montrez qu'il existe un entier $l \geq 1$ tel que $x^l = e$.

b. Désormais on choisit pour l le plus petit de ces entiers. Pour un élément $g \in G$, on note

$$C(g) = \{\, x^i g \,\}_{i \in \mathbf{Z}}\ .$$

c. Montrez que $\mathrm{card}(C(g)) = l$ (utilisez la bijection f_g de l'exercice précédent).

d. Soit g_1 et g_2 dans G. Montrez qu'on a soit $C(g_1) \cap C(g_2) = \emptyset$, soit $C(g_1) = C(g_2)$.

e. Montrez qu'il existe un nombre fini r d'éléments $g_1, \ldots, g_r$ tels que

$$G = C(g_1) \sqcup \cdots \sqcup C(g_r) \qquad (\sqcup \text{ est l'union disjointe}).$$

f. En calculant les cardinaux des 2 ensembles de l'égalité précédente, conclure que $x^n = e$.
