# Exercices Alternatifs

## Introduction à l'étude des suites de nombres



Sources et figures: `introduction-suites/`.
Version imprimable: `introduction-suites.pdf`
*Suites. DEUG première année.* Angle pédagogique : *Découverte.*

Objectifs et commentaires. *La première partie, sous forme de quizz, a pour but de faire prendre conscience aux étudiants de la naïveté de leur représentation des suites. Dans le même temps, elle permet de constituer un petit réservoir d'exemples de suites un peu plus compliquées que les suites monotones du Lycée. On espère qu'après cette étude, les étudiants sont "psychologiquement préparés" à accepter la nécessité d'une définition formelle de la limite. On leur demande alors de retrouver quelques définitions (ce texte s'adressait à des étudiants ayant déjà eu un cours sur les limites de fonctions, AVANT le cours sur les suites). Après quoi, on leur demande de démontrer quelques résultats très simples à partir de la définition de la limite. On propose ensuite des exercices plus délicats.*

*Dans le bilan qui suit, on a essayé de leur expliquer quelques aspects des preuves avec "$\epsilon$". En particulier, on démonte la partie purement mécanique, afin d'isoler les endroits où il y a besoin d'une vraie réflexion. Et on tente de leur expliquer brièvement quelques-uns des pièges concernant les variables de la démonstration. Les preuves proposées par les étudiants sont souvent incorrectes, par manque de maîtrise du langage mathématique ; et il est en général très difficile de leur expliquer "en direct" où se situe leurs erreurs de raisonnement. On espère pouvoir utiliser ce texte comme une référence pour ce genre de situation. Bien entendu, le texte est très incomplet et nécessiterait de nombreuses améliorations...*

*Il faut compter une séance de deux heures pour le Quizz, une autre pour les premier exemples simples. On peut ensuite faire le bilan, puis leur proposer éventuellement de s'attaquer aux exercices plus compliqués.*

---

*Dans tout le texte, les suites considérées sont toutes à valeurs réelles.*

## I. Testez votre intuition

### Question 1. Dessins

Dessiner l'allure des suites $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\left(-\frac{1}{n}\right)$, $((-1)^n)$, $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, $((-1)^n.n)$, $\left(n\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$.

### Question 2. Quizz

Répondre par VRAI ou FAUX (essayez de justifier vos réponses par une preuve ou un contre-exemple[1]) :

**a.** Si une suite est bornée, alors elle admet une limite.

**b.** Si $(u_n)$ est une suite strictement positive et convergente, alors $\lim(u_n) > 0$.

---

[1]Pour les contre-exemples, on peut commencer par faire un dessin, avant d'essayer de trouver une formule explicite ou une définition par récurrence.

**c.** Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers $+\infty$. Alors cette suite est croissante.

**d.** Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers $+\infty$. Alors cette suite est croissante à partir d'un certain rang.

**e.** Soit $(u_n)$ une suite à valeurs strictement positives et qui tend vers 0. Alors cette suite est décroissante à partir d'un certain rang.

**f.** Toute suite positive non bornée tend vers $+\infty$.

**g.** Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

**h.** Toute suite positive croissante non bornée tend vers $+\infty$.

*Le but du "quizz" ci-dessus était de vous faire prendre consience du fait suivant : l'image mentale qu'on a d'une "suite qui tend vers une limite l (finie ou infinie)" est généralement trop simpliste. Dans de nombreux cas (suite qui n'est pas monotone à partir d'un certain rang, par exemple), notre intuition devient trompeuse. C'est pour cette raison qu'a été introduite la définition "en $\varepsilon$"...*

## II. À propos des définitions "en $\varepsilon$psilon"

Pendant longtemps (jusqu'au XIXème siècle), les mathématiciens ont manipulé des suites et des fonctions en se contentant de la définition intuitive de la limite, sans rencontrer de problème particulier. Puis, ils sont tombés sur des propriétés plus subtiles, où l'intuition les a conduits à des contradictions. Ils ont alors commencé à critiquer le manque de rigueur en Analyse (en comparant par exemple à d'autres domaines des mathématiques comme l'arithmétique), et ils ont ressenti le besoin de se donner des **définitions précises**.
Ceci n'a pas été sans mal. En 1821, Cauchy (voir courte biographie à la fin de ce texte) propose la définition suivante : "*Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres*" ; en 1835, De Morgan écrit : "*Laissez-moi rendre $x$ aussi petit que je veux, et je pourrai rendre $7 + x$ aussi proche de 7 que* vous *voulez*" ; enfin, Weierstrass écrit la définition moderne de la limite, avec les $\epsilon$s et les $\delta$s, entre 1840 et 1860. Une des difficultés était que les notions de variables et de fonctions n'étaient pas non plus clairement définies.
Ces définitions ont représenté **un progrès énorme**, puisqu'elles permettent de savoir exactement de quoi on parle, et de distinguer avec certitude les propriétés vraies des propriétés fausses.
Mais il ne faut pas cacher que ces définitions ont aussi **un gros désavantage** : elles sont difficiles à comprendre, et surtout très difficiles à manipuler. Atteindre la certitude a un prix : il faut pour cela accepter de passer un certain temps à se familiariser, progressivement, avec ces notions.
En particulier, les premiers exercices peuvent être un peu frustrants, puisqu'on a l'impression de se fatiguer beaucoup pour démontrer des évidences. Il ne faut pas oublier que ce ne sont que "des gammes", et qu'il faut commencer par faire des gammes avant de pouvoir jouer de la vraie musique...

**Dans tous les exercices qui suivent, la règle du jeu est d'obtenir une rédaction la plus convainquante possible, en utilisant chaque fois qu'il le faut la définition "en $\epsilon$" de la limite.**

---

## III. Exercices simples avec le formalisme en "$\epsilon$"

### Question 1. Préliminaires

Donner la définition...

**a.** d'une suite ;

**b.** de sa limite éventuelle[2] ;

[2] Si le cours n'a pas encore eu lieu, inspirez-vous de la définition de la limite pour une fonction.

**c.** d'une suite bornée ; d'une suite non bornée ;

**d.** d'une suite croissante ;

**e.** d'une suite croissante à partir d'un certain rang.

**Question 2. Applications directes de la définition**

Montrer les propriétés suivantes :

**a.** La suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

**b.** Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers 1 ; alors cette suite est strictement positive à partir d'un certain rang (traduire d'abord cette phrase avec des quantificateurs).

**c.** Si une suite admet une limite finie, alors elle est bornée.

**d.** Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers 0. Alors la suite $(u_{n+100})$ tend aussi vers 0. Même chose pour la suite $(u_{2n})$. **Aide** pour comprendre ce qu'est la suite $(u_{n+100})$ : prenez $u_n = 1/n$, écrivez les premiers termes des suites $(u_{n+100})$, $(u_{2n})$, $(u_{n^2})$.

---

## IV. Exercices plus difficiles

**Question 1. Suites de rang pair et impair**

Soit $(u_n)$ une suite telle que les deux suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ tendent vers 0. Montrer que la suite $(u_n)$ tend aussi vers 0.

*Remarque.* Si ce résultat vous paraît évident, alors vous trouverez sûrement également évident l'énoncé suivant : Soit $(u_n)$ une suite telle que les sous-suites $(u_{2n})$, $(u_{3n})$, $(u_{4n})$, $(u_{5n})$, ... tendent toutes vers 0 ; alors la suite $(u_n)$ tend vers 0. Pourtant ce dernier énoncé est FAUX ! (pensez à la suite $(u_n)$ qui vaut 1 si $n$ est un nombre premier, et 0 sinon). Comme quoi, les $\epsilon$ et les $\eta$ sont parfois utiles...

**Question 2. Critère séquentiel de la continuité**

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ est continue en 0 si et seulement si elle vérifie le *critère séquentiel de la continuité : pour toute suite* $(u_n)$ *convergeant vers* 0, *la suite* $f(u_n)$ *converge vers* $f(0)$.

**Question 3.**

Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet une limite finie $l$ en $+\infty$. Quel est le comportement (en $+\infty$) de la suite $(v_n)$ définie par :

$$v_n = \int_n^{n+5} f(t)dt \qquad ?$$

*Indication :* essayer de deviner la valeur de cette intégrale quand $n$ est très grand (à l'aide d'un dessin), puis rédiger une preuve.

*Remarque.* Si le résultat ci-dessus ne vous parait pas nécessiter de preuve, alors la convergence de la suite

$$w_n = \int_n^{2n} f(t)dt$$

devrait également vous paraître évidente. Pourtant, essayez avec $f(t) = \frac{1}{t}$ ; bien que $f(t)$ tende vers 0 quand $t$ tend vers $+\infty$, vous verrez que la suite $w_n$ ne tend pas vers 0, mais vers $\ln(2)$. Mieux : si on prend $f(t) = \frac{\sin(\ln(t))}{t}$ (qui tend également vers 0 quand $t$ tend $+\infty$), on peut vérifier que la suite $w_n$ ne converge pas (il existe une sous-suite de $w_n$ qui tend vers $-\ln(2)$, et une sous-suite qui tend vers $\ln(2)$) ! Encore un cas où les $\epsilon$ et les $\eta$ évitent de dire des bêtises !

**Question 4. Suites d'entiers**

Donner la définition d'une suite stationnaire. Montrer qu'une suite d'entiers qui tend vers une limite finie est stationnaire.

**Question 5. Extraction**

On appelle *suite extraite de la suite* $(u_n)$ (ou *sous-suite de* $(u_n)$) “n'importe quelle suite obtenue à partir de $(u_n)$ en oubliant certains termes”.

**a.** Transformez cette définition vague en une vraie définition.

**b.** Choisissez une suite $(u_n)$ bornée non convergente (voir le quizz, question I.2.a). Trouvez une suite extraite de $(u_n)$ qui est convergente. Trouvez une autre suite extraite de $(u_n)$ qui converge vers une autre limite.

**c.** Soit $(u_n)$ une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)$ qui est croissante. (**Indication :** commencez par relire le quizz, question I.2.d ; faites un dessin d'un contre-exemple à cette affirmation du quizz ; sur le dessin, comment extraire une suite croissante ? Puis construire la suite extraite, par récurrence, dans le cas général.)

**Question 6. Vers l'idée de “valeurs d'adhérence”...**

**a.** Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois les valeurs 1 et 2 ?

**b.** Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois les valeurs 1 et 2 et 3 ?

**c.** Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois la valeur 1, ET une infinité de fois la valeur 2, ... ET ainsi de suite pour CHAQUE entier positif $k$ ?

**d.** Existe-t-il une suite $(u_n)$ à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que : pour tout réel $x$ entre 0 et 1, la suite $(u_n)$ s'approche arbitrairement près de $x$, et à un rang arbitrairement grand ? (Commencer par traduire cette propriété avec des “$\epsilon$”).

## V. Bilan : déboulonnage des preuves en " $\epsilon$"

*Pendant la première séance sur les suites, vous avez répondu au "Quizz". Le but était de voir que l'étude des suites est pleine de pièges, certaines suites ayant un comportement compliqué. Cette complexité a conduit les mathématiciens à adopter la définition de la limite d'une suite "en $\epsilon$". Pendant la deuxième séance, vous avez écrit certaines définitions, puis essayé de démontrer quelques propriétés simples à l'aide de ces définitions. Ce bilan contient les preuves des propriétés de la question 2 (a, b et d). Mais surtout, on a tenté d'expliquer en détail comment ces preuves sont construites, de les "déboulonner"...*

Nous allons essayer de comprendre quelques aspects des "preuves avec epsilons" sur des exemples de propriétés simples. Au lieu de nous contenter de donner des preuves de ces propriétés, nous allons plutôt tenter *une explication de la manière dont on parvient à écrire ces preuves.* Avant de commencer, rappelons la règle du jeu : *toutes les propriétés doivent être démontrées en revenant à la définition "en $\epsilon$", rien ne doit être considéré comme évident.*

### Premier exemple

Montrons que la suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

Y a-t-il vraiment quelquechose à montrer ?! Et bien oui, puisque on a convenu de ne rien considérer comme évident en ce qui concerne les suites. Pour savoir ce qu'il y a à montrer, on réécrit la question en utilisant la définition de la limite :

> À montrer : la suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$, c'est-à-dire
>
> $$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } \sqrt{n} \geq M.$$

Le fait d'avoir écrit cette phrase nous donne des renseignements sur ce que l'on doit faire. Puisque cette phrase commence par "$\forall M \in \mathbb{R}$...", la démonstration devrait commencer par la phrase "Soit $M$ un réel quelconque." La suite de la phrase est "$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que ...", ce qui signifie qu'on va devoir *fournir* un entier $n_0$, qui devra vérifier la fin de la phrase : "$\forall n \geq n_0$, on a $\sqrt{n} \geq M$". On a ainsi un squelette de rédaction :

> Soit $M$ un réel quelconque.
> Définissons un entier $n_0$ de la manière suivante :
>
> ???
>
> Vérifions que $\forall n \geq n_0$, on a $\sqrt{n} \geq M$ :
>
> ???

Il reste à remplir les trous, c'est-à-dire surtout à trouver comment définir $n_0$. En regardant la fin, et en cherchant un peu, on voit que ça devrait marcher si $n_0^2 \geq M$. On vérifie, ce qui revient à écrire la fin de la preuve :

À montrer : la suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } \sqrt{n} \geq M.$$

---

Soit $M$ un réel quelconque.
Définissons un entier $n_0$ de la manière suivante :
On choisit un entier $n_0$ plus grand que $M^2$ (par exemple le premier entier supérieur à $M^2$).
Vérifions que $\forall n \geq n_0,$ on a $\sqrt{n} \geq M$ :
Soit $n \geq n_0$. Puisque $n_0 \geq M^2$, on a $n \geq n_0 \geq M^2$. Donc $\sqrt{n} \geq M$.

**Commentaires**

1) On a découpé la phrase à montrer en trois morceaux :

$$\underbrace{\forall M \in \mathbb{R}}, \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \text{ tel que } \underbrace{\forall n \geq n_0, \text{ on a } \sqrt{n} \geq M}.$$

Chaque morceau correspond à une phrase du "squelette de preuve", soulignée dans la démonstration.

2) On doit montrer qu'une propriété est valable pour tout $M$, c'est pourquoi, dans la démonstration, on commence par se donner un réel $M$ *quelconque* : le mot "quelconque" sert à rappeler qu'on n'a pas le droit de supposer quoi que ce soit qui restreigne la valeur de $M$. Par exemple, la preuve ne peut pas commencer par "Soit $M = 100$", ni par "Soit $M$ un réel négatif" (bien sûr, par la suite, on pourrait séparer l'étude en différents cas, à condition que l'ensemble des cas étudiés couvre bien toutes les valeurs possibles de $M$).

## Deuxième exemple

Montrons que si $(u_n)$ est une suite qui tend vers 1, alors cette suite est strictement positive à partir d'un certain rang.

Là encore, on traduit l'hypothèse et le but avec des quantificateurs :

Hypothèse : $(u_n)$ est une suite qui tend vers 1, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } 1 - \epsilon < u_n < 1 + \epsilon.$$

À montrer : $(u_n)$ est strictement positive à partir d'un certain rang, c'est-à-dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } u_n > 0.$$

Cette fois-ci, la phrase à montrer commence par le quantificateur d'existence $(\exists n_0)$ ; il va donc falloir fournir un entier $n_0$ qui vérifie la propriété voulue $(\forall n \geq n_0, \text{ on a } u_n > 0)$. Le squelette de la preuve devrait donc être :

Définissons un entier $n_0$ de la manière suivante :

???

Vérifions que $\forall n \geq n_0,$ on a $u_n > 0$ :

???

D'autre part, l'hypothèse commence par "$\forall \epsilon > 0, \exists n_0$". Elle va donc nous fournir un entier $n_0$, *à condition qu'on dise pour quelle valeur de* $\epsilon$ on veut appliquer cette propriété.

Il faut donc réfléchir un peu pour trouver une valeur intéressante de $\epsilon$. La propriété que l'hypothèse va nous donner est $1 - \epsilon < u_n < 1 + \epsilon$, celle que l'on voudrait obtenir est $u_n > 0$ : on voit que ça devrait marcher avec $\epsilon = 1$. En effet, pour $\epsilon = 1$, l'hypothèse donne $0 < u_n < 2$, donc notamment $u_n > 0$ (l'autre inégalité ne sert pas). On peut maintenant rédiger une preuve.

Hypothèse : $(u_n)$ est une suite qui tend vers 1, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } 1 - \epsilon < u_n < 1 + \epsilon.$$

À montrer : $(u_n)$ est strictement positive à partir d'un certain rang, c'est-à-dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } u_n > 0.$$

---

Définissons un entier $n_0$ de la manière suivante. On applique l'hypothèse avec $\epsilon = 1$. L'hypothèse nous fournit alors un entier $n_0$ tel que $\forall n \geq n_0,$ on a $0 < u_n < 2$.
Vérifions que $\forall n \geq n_0,$ on a $u_n > 0$ : c'est clair !

**Commentaires**

1) La première phase de la démarche consiste à écrire le "squelette de preuve", en fonction de la propriété à montrer. Avec un peu d'habitude, cette première phase devient (en partie) mécanique, automatique. Après quoi, on peut commencer à réflechir (on sait maintenant ce qu'on cherche) : dans le premier exemple, il fallait penser à choisir $n_0$ plus grand que $M^2$ ; dans le deuxième, il fallait penser à choisir $\epsilon = 1$. Enfin, on peut rédiger la preuve, et vérifier en même temps que le choix (de $n_0$) convient. Si ça ne marche pas, on essaie de voir ce qui coince, et on essaie un autre choix... Dans la rédaction finale, l'endroit où l'on a vraiment fait preuve de réflexion se réduit à une petite phrase ! Mais il s'agit de l'endroit le plus difficile de la preuve, là où il faut un peu d'imagination (quand on lit une preuve, ce sont les endroits où l'on se dit : ¡¡ Mais pourquoi fait-il ça ? Pourquoi choisit-il $n_0$ plus grand que $M^2$ ? Pourquoi prendre $\epsilon = 1$ et pas $\epsilon = 1997$ ? ¿¿ Une réponse est : ¡¡ Là, il a réfléchi ! On devrait voir plus loin pourquoi ça marche.¿¿). Personne n'a trouvé de méthode pour arriver à faire des maths sans avoir à réfléchir...

2) Dans chacun des deux exemples, on a écrit une définition de limite. Dans le premier cas, c'était une propriété *à montrer*. On a vu que ceci conduisait à considérer un réel $M$ quelconque, sur lequel on n'avait aucun choix. Au contraire, dans le second cas, une définition de limite apparaissait dans l'hypothèse, autrement dit il s'agissait d'une propriété *à utiliser*. On l'a alors utilisée en choisissant une valeur de $\epsilon$ (ici $\epsilon = 1$). Retenons cette différence : pour *montrer* une phrase commençant par $\forall a$..., on se donne un $a$ *quelconque* ; tandis que pour l'utiliser, *on peut choisir* le réel $a$.

## Troisième exemple

Montrons la propriété suivante : Soit $(u_n)$ une suite telle que les deux suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ tendent vers 0 ; alors la suite $(u_n)$ tend aussi vers 0.

Hypothèses : les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ tendent vers 0, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_{2n}| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_{2n+1}| < \epsilon.$$

À montrer : la suite $(u_n)$ tend vers 0, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_n| < \epsilon.$$

---

Soit $\epsilon$ un réel strictement positif quelconque. On applique la première hypothèse avec ce même $\epsilon$ ; ceci nous fournit un entier que l'on note $n_1$, tel que $\forall n \geq n_1$, on a $|u_{2n}| < \epsilon$ (appelons ceci la propriété P1). De même, en appliquant la deuxième hypothèse, on obtient un entier $n_2$ tel que $\forall n \geq n_2$, on a $|u_{2n+1}| < \epsilon$ (propriété P2).
Définissons alors un entier $n_0$ de la manière suivante : On choisit un entier $n_0$ plus grand que $2n_1$ et $2n_2 + 1$ (par exemple, $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$.
Vérifions que $\forall n \geq n_0$, on a $|u_n| \leq \epsilon$.
Soit $n \geq n_0$. On considère deux cas.
– Ou bien $n$ est pair, et on écrit $n = 2n'$ (et donc $u_n = u_{2n'}$). Alors $n = 2n' \geq n_0 \geq 2n_1$, donc $n' \geq n_1$. D'après la propriété P1, on a alors

$$|u_n| = |u_{2n'}| < \epsilon.$$

– Ou bien $n$ est impair, et on écrit $n = 2n' + 1$. On a $2n' + 1 \geq n_0 \geq 2n_2 + 1$, donc $n' \geq n_2$. On voit grâce à la propriété P2 que

$$|u_n| < \epsilon.$$

Dans tous les cas, on a $|u_n| < \epsilon$, ce que l'on voulait.

**Commentaires**

1) Les entiers "$n_0$" fournis par les deux hypothèses n'ont aucune raison d'être égaux : un entier $n_0$ qui marche pour la première peut très bien ne pas marcher pour la deuxième. C'est pourquoi, dans la démontration, on doit choisir deux notations différentes (ici, on a choisi $n_1$ et $n_2$). Dans la preuve, on *ne peut pas* écrire :

> On applique les deux hypothèses ; ceci nous fournit un entier $n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, on a $|u_{2n}| < \epsilon$ et $|u_{2n+1}| < \epsilon$.

De même, l'entier $n_0$ qui apparaît dans la phrase à montrer (celui que l'on cherche) est encore différent. Pour être sûr de ne pas avoir de problème, on aurait pu choisir des notations différentes dès l'écriture des hypothèses et de la conclusion :

Hypothèses : les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ tendent vers 0, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_1, \text{ on a } |u_{2n}| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_2, \text{ on a } |u_{2n+1}| < \epsilon.$$

À montrer : la suite $(u_n)$ tend vers 0, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_n| < \epsilon.$$

On aurait aussi pu changer les notations des "$\epsilon$" : après tout, on ne sait pas *a priori* qu'on va choisir les mêmes valeurs dans les deux hypothèses. Nous reviendrons sur ces problème dans l'annexe 1.

2) Comme dans les deux premiers exemples, il y a un passage difficile, là où on définit $n_0$. Comment a-t-on trouvé qu'il fallait définir $n_0$ de cette façon "bizarre" ? À vrai dire, quand j'ai écrit cette preuve au brouillon, je n'ai pas trouvé la bonne définition de $n_0$ du premier coup ! On sent bien qu'il faut fabriquer $n_0$ à l'aide de $n_1$ et $n_2$ ; alors j'ai commencé par essayer de choisir simplement $n_0$ plus grand que $n_1$ et $n_2$. Et puis j'ai regardé si j'arrivais à écrire la fin de la preuve, ça a coincé, et j'ai vu ce qu'il fallait faire pour que ça ne coince plus (en réalité, mon deuxième essai n'était pas bon non plus, le cas où $n$ est impair ne marchait pas ; mais la troisième fois était la bonne)...

3) La vérification finale est une petite démonstration à l'intérieur de la grande ("Vérifions que $\forall n \geq n_0$, on a $|u_n| \leq \epsilon$"). On lui applique les mêmes principes : en particulier, ce qu'on doit démontrer commence par "$\forall n \geq n_0$" ; par quelle phrase commence la petite démonstration ?... Pour une preuve plus longue, on peut avoir de cette manière plusieurs morceaux de démonstrations imbriqués les uns dans les autres, comme des poupées Russes.

### Avant de conclure, quelques mots sur les variables

Dans les phrases à montrer, on écrit :

$$\forall M \in \mathbb{R}$$

Dans la démonstration, on écrit :

Soit $M$ un réel quelconque.

Y a-t-il une différence profonde entre ces deux écritures ? Après tout, elles semblent dire exactement la même chose...

Il y a bien une différence, et elle concerne ce qu'on pourrait appeler la "durée de vie d'une variable". Revenons sur le premier exemple. Après qu'on ait écrit "Soit $M$ un réel quelconque", on va utiliser la variable $M$ pendant toute la démonstration : le "$M$" que l'on définit est le même que celui qui apparaît à la dernière ligne de la preuve. Par contre, quand on a écrit la définition de la limite,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } \sqrt{n} \geq M$$

la variable $M$ a une durée de vie très courte, elle n'existe que dans cette petite phrase. De même, regardons les hypothèses du troisième exemple :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_{2n}| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_{2n+1}| < \epsilon.$$

Ces deux phrases sont indépendantes, et chacune des variables n'existe que dans sa propre phrase. En particulier, le "$n_0$" dans la première *n'a rien à voir* avec celui de la deuxième (voir à ce sujet le commentaire suivant ce troisième exemple). On dit que les variables $\epsilon$, $n_0$ et $n$ de chaque phrase sont "liées" à la phrase (on dit aussi que ce sont des variables "muettes").

Revenons sur le troisième exemple. La variable $\epsilon$ existe à partir de l'endroit où elle est définie (au tout début, "Soit $\epsilon$..."). La variable $n_0$ apparaît un peu plus loin ("Définissons alors un entier $n_0$..."). Ces deux variables existent jusqu'à la fin de la preuve. Le cas de la variable $n$ est plus intéressant. En effet, elle apparaît une première fois à la deuxième ligne, et elle "meurt" presque immédiatement (c'est la propriété P1 : "$\forall n \geq n_1$, on a $|u_{2n}| < \epsilon$"). Elle fait à nouveau une courte apparition à la ligne suivante (propriété P2 : "$\forall n \geq n_2$, on a $|u_{2n+1}| < \epsilon$"). Enfin, elle renait une dernière fois pour la fin de la preuve (à partir de "Soit $n \geq n_2$"). Il est très important de comprendre que ces trois "$n$" sont complètement indépendants. Bien qu'on ait utilisé la même notation, *il faut considérer que ce sont trois variables distinctes*. On aurait d'ailleurs pu choisir trois notations différentes, comme $n$, $n'$ et $n''$ (mais la lecture aurait été moins agréable, surtout que la notation $n'$ est encore utilisée plus bas à deux endroits, qu'on aurait dû transformer en $n'''$ et $n''''$ !).

Pour ne pas s'embrouiller, il est fortement recommandé d'annoncer la naissance de toutes les variables par une expression du type "Soit $M$ un réel quelconque", "Considérons un entier $n \geq n_2$", "On se donne une droite $D$ du plan"... La seule exception concerne les phrases avec quantificateurs, dans lesquelles les variables meurent toutes à la fin de la phrase.

Le statut des variables dans le langage mathématiques est compliqué, il faudrait plus de place pour aborder tous ses pièges. Je vous recommande fortement la lecture d'un texte de Frédéric Pham, *"Ça dépend"*. Ce texte est disponible sur le Web :

http ://math1.unice.fr/ fpham/dep.pdf

Il fait aussi partie du livre *Fonctions d'une ou deux variables*, aux éditions Dunod.

## Conclusion

Les démonstrations concernant les limites sont pleines de pièges. Certain de ces pièges peuvent être évités en suivant la méthode proposée, notamment :

- **écrire les phrases avec quantificateurs correspondant aux hypothèses et à la conclusion ;**
- **écrire toutes les phrases (en français) correspondant au "squelette" de la démonstration ;**
- **à chaque fois qu'une variable apparaît dans la preuve,**
  - **ou bien elle a été introduite par l'un des deux quantificateurs "$\forall$" et "$\exists$", et dans ce cas la variable est "muette", elle disparaît à la fin de la phrase ;**
  - **ou bien elle a été introduite par une expression du type "Soit $M$...", "Considérons un réel $M$...".**

Bien sûr, cette méthode est assez lourde. Vous remarquerez qu'elle est rarement totalement appliquée, même dans les livres. De plus, il ne suffit pas de savoir utiliser la méthode pour résoudre un exercice : comme on l'a remarqué, rien ne peut remplacer la réflexion. Mais la méthode permet de cerner clairement ce qu'il y a à trouver.

**Conseil :** tant que vous n'êtes pas absolument sûr de ne pas faire d'erreurs, appliquez la méthode au pied de la lettre. Le principe est toujours : on peut se permettre de ne pas écrire certains détails, à condition d'être capable de les écrire.

Quelle est la portée de cette méthode ? La méthode ne s'applique pas à toutes les preuves. Par exemple, montrons que la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ tend vers 0. On a déjà montré que la suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$. On peut appliquer le théorème du cours qui dit que si une suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$, alors la suite $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0, et c'est fini. Autrement dit, la méthode n'est pas très pertinente quand la preuve consiste principalement à appliquer un théorème. Avant de revenir à la définition "en $\epsilon$" (et d'appliquer la méthode), il faut se demander si il n'y a pas un argument plus simple.

**Exercice d'assimilation** Pour bien assimiler les mécanismes que nous venons de voir, il faut les démonter en étudiant le plus possible d'exemples.

Prendre un cours sur les limites des suites ou des fonctions. Choisir une propriété démontrée dans le cours, où on utilise une définition de la limite (par exemple, la propriété de somme des limites : si deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ convergent respectivement vers $x$ et $y$, alors la suite $(x_n + y_n)$ converge vers $x+y$). Le but de l'exercice est de réécrire la preuve en faisant apparaître sa structure, son squelette.

**a.** L'hypothèse et la conclusion ne sont peut-être pas écrites avec des quantificateurs : dans ce cas, écrivez-les.

**b.** Repérer le squelette de la preuve, par exemple en soulignant les phrases-clés comme dans les rédactions des deux exemples que l'on vient de voir. Comme plus haut, chaque morceau de la phrase à démontrer doit avoir une contrepartie dans la preuve : le "$\forall\epsilon > 0$" doit correspondre à quelquechose comme "Soit $\epsilon > 0$" ; si un morceau dit "$\exists n_0$", on doit retrouver dans la preuve un endroit où on définit un $n_0$... Les phrases-clés sont parfois absentes. Elles sont alors implicites : repérer l'endroit où il faudrait les rajouter.

**c.** Repérer aussi les endroits où il a fallu réfléchir.

**d.** Détecter les propriétés utilisées, par exemple les hypothèses. Si on a utilisé une hypothèse qui commence par "$\forall\epsilon$...", à quelle(s) valeur(s) de $\epsilon$ l'a-t-on appliquée ?

**e.** Repérer enfin les endroits où les variables "naissent et meurent" (pour chaque variable, on peut faire un trait dans la marge qui va de l'endroit où elle apparaît jusqu'à l'endroit où elle disparaît). Y a-t-il des variables distinctes qui sont notées de la même façon ?

Refaire l'exercice avec d'autres exemples, des plus simples aux plus compliqués.

## VI. Quelques repères historiques pour finir.

**Augustin-Louis Cauchy** (Paris 1789 - Sceaux 1857) est un des mathématiciens dont les contributions ont le plus fait progresser les mathématiques. Son "Cours d'Analyse" est un des textes fondateurs de l'analyse moderne. Cauchy y propose les premières ébauches des définitions modernes des notions de *fonction*, de *limite*, de *continuité*, etc. Cauchy est aussi considéré comme le fondateur de l'*analyse complexe*. Il contribua également de manière fondamentale à l'étude d'objets aussi divers que les *équations différentielles*, les *permutations d'ensembles finis*, les *polyèdres*, etc. Il fut professeur au Collège de France, à la Sorbonne et à l'École polytechnique, mais les évènements politiques (révolution de Juillet en 1830, coup d'État de Napoléon III en 1852) l'obligèrent néanmoins à s'exiler à plusieurs reprises, pendant de longues période (en Italie notamment). Avant de se consacrer aux mathématiques, Cauchy fut ingénieur des Ponts et Chaussés et dirigea la construction du port de Cherbourg (à 21 ans...).


**Augustus De Morgan** (Madras 1806 - Londres 1871) est surtout connu pour avoir formalisé et clarifié la notion de *raisonnement par récurrence.*

**Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (Ostenfelde 1815 - Berlin 1897) commença sa carrière comme instituteur, avant de devenir un des très grand mathématiciens du XIXeme siècle. Ses travaux poursuivent l'effort de rigueur initié par Cauchy. . Ainsi, c'est Weierstrass qui (s'appuyant sur les travaux de Cauchy) propose ce qui constitue les définitions modernes de *limite d'un suite*, ou de *continuité d'une fonction.* Ce sont également les travaux de Weierstrass qui préciseront aussi le statut des nombres irrationnels, notion encore vague depuis la découverte de ces derniers par les Pythagoriciens (disciples de Pythagore). Enfin, l'œuvre majeure de Weierstrass est certainement le développement de la théorie des *fonctions analytiques* ou *fonctions développables en séries entières* : une fonction est développable en série entière si elle est limite (en un sens à préciser) de ses développements de Taylor à l'ordre $n$.