Exercices Alternatifs

Moindres carrés.

Source: `moindres_carres.tex`.
Version imprimable: `moindres_carres.pdf`
Algèbre linéaire. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *À quoi ça sert.*

Objectifs et commentaires. *Faire retrouver à l'étudiant la méthode des moindres carrés sur un exemple.*

Considérons le système

$$(S)\begin{cases} x_1+x_2 &= 3\\ -2x_1+3x_2 &= 1\\ 2x_1-x_2 &= 2 \end{cases}$$

a. Montrer que ce système n'a pas de solution

Ce système s'écrit aussi $A.X=b$ avec $A=\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\\2&-1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $b=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$. On cherche alors à trouver la meilleure solution approchée, c'est à dire X_0 tel que $||A.X_0-b||^2$ soit minimal (où ——.—— est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$).

b. Démontrer que X_0 réalise le minimum de la fonction $||A.X-b||^2$ si et seulement si $A.X_0-b$ est orthogonal à Im A.

c. Trouver la meilleure solution approchée du système (S).

d. Pour un système $A.X=b$ quelconque, donner un système d'équations dont les solutions sont les meilleures solutions approchées du système original.

Cette méthode pour trouver une solution approchée s'appelle la méthode des moindres carrés. Elle est très utilisée en sciences expérimentales, par exemple pour trouver des coefficients d'une application affine passant le plus près possible de valeurs expérimentales.

e. Etant donnés une série de points expérimentaux (x_n,y_n), on cherche la fonction affine $y=ax+b$ qui approxime le mieux les points expérimentaux. Déterminer un système d'équations dont les solutions sont les coefficients a et b de la fonction affine cherchée.
