Exercices Alternatifs

Matrice d'inertie d'un solide

Source: `moment_d_inertie.tex`.
Version imprimable: `moment_d_inertie.pdf`
Algèbre linéaire. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *À quoi ça sert.*

Objectifs et commentaires. *Faire remarquer que la matrice d'inertie utilisée en mécanique du solide est une forme quadratique. L'exitence de symétries du solide se traduit par des conditions sur la matrice d'inertie. C'est une application concrète de la formule du changement de bases.*

Soit S un solide et O une origine (par exemple, mais pas forcément, son centre de gravité). Lorsqu'on fait tourner S le long d'un axe d passant par O avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$, la vitesse instantanée d'un point M du solide est donnée par $\vec{\omega} \wedge O\vec{M}$. Son énergie cinétique est donc donnée par

$$E_c(\vec{\omega}) = \iiint_S \frac{1}{2}(\vec{\omega} \wedge O\vec{M})^2 dm$$

où dm représente l'élément de masse.

a. Démontrer que l'origine étant fixée, E_c est une forme quadratique en $\vec{\omega}$. Sa matrice dans une base donnée s'appelle la matrice d'inertie de S.

Remarque. Par définition, les axes principaux sont des axes de diagonalisation simultanée de la forme quadratique d'inertie et du produit scalaire.

b. La matrice d'inertie d'un solide peut-elle etre égale à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$?

c. La matrice d'inertie d'un solide peut-elle etre égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$?

d. Comment se transforme la matrice d'inertie d'un solide lorsqu'on transforme le solide S en son symétrique par rapport au plan (xOy) ?

e. Calculer (en utilisant les symétries pour réduire les calculs) la matrice d'inertie du parallélépipède $\{(x,y,z) | -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c\}$.
