Exercices Alternatifs

Forme de Lorentz, loi relativiste de composition des vitesses, et paradoxe des jumeaux de Langevin

Source: `paradoxe_des_jumeaux.tex`.
Version imprimable: `paradoxe_des_jumeaux.pdf`
Algèbre linéaire. DEUG première année. Angle pédagogique : *À quoi ça sert.*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice permet de retrouver beaucoup de choses de la relativité restreinte à partir seulement de la forme de Lorentz. Cela permet de montrer un autre aspect des formes quadratiques, parallèle à la géométrie euclidienne. On y utilise un algorithme de Schmidt adapté aux formes non positives. Le paradoxe des jumeaux de Langevin est une sorte d'inégalité triangulaire à l'envers qui utilise des raisonnement similaires à ceux établissant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le théorème d'inertie de Sylvester.*

I. Les lignes de vie dans l'espace-temps.

Pour donner rendez-vous à quelqu'un vous devez préciser le lieu et l'heure. L'espace-temps est un modèle de l'ensemble des points de rendez-vous possibles.

Définition. *L'espace-temps E est un espace vectoriel de dimension* 4.

On peut parfois utiliser des coordonnées pour décrire un point de l'espace-temps (c'est plus adapté dans certaines villes que d'autres) : *rendez-vous à 20h30 au croisement de la 10^e^rue, 16^e^avenue, 37^e^étage.* Pour parler de coordonnées, il faut un référentiel.

Définition. *Un* référentiel *de l'espace-temps E est une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E.*[1]

Par commodité, on considère souvent un bébé modèle (on dit aussi *toy model* en anglais) où l'espace-temps E est de dimension 2 (une dimension d'espace et une dimension de temps).

Les questions qui suivent ne sont pas mathématiques à proprement parler mais sont plutôt des questions de modélisation dont le but est d'aboutir à des définitions mathématiques. Elles sont aussi un moyen de se familiariser avec cette notion d'espace-temps.

On suppose que l'espace-temps E est muni d'un référentiel $\mathcal{R}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ tel que les 3 premières coordonnées x, y, z dans $\mathcal{R}_0$ représentent les coordonnées d'espace habituelles (dans une base orthonormée fixe par rapport à la terre), et la quatrième coordonnée représente la date, c'est à dire le temps écoulé depuis l'origine des temps qu'on a choisie. On dit que $\mathcal{R}_0$ un référentiel fixe par rapport à la terre.

---

[1] On peut imaginer d'autres types de référentiels : accélérés ou en rotation mais ils ne rentrent pas dans le cadre de la relativité restreinte. Par contre, il ne faut pas penser que ces référentiels sont *fixes* les uns par rapport aux autres. Voir question 4

Question 1.

Un train parcours en ligne droite et à vitesse constante le trajet Paris-Marseille (on dit que le train est en mouvement rectiligne uniforme). Dans un référentiel fixe par rapport à la terre, faire un dessin de l'ensemble des points de l'espace-temps occupés par le train, autrement dit, la trajectoire du train dans l'espace-temps (on pourra se placer dans le bébé modèle). On appelle cet ensemble la *ligne de vie* du train.

Dessiner sur le même graphique la ligne de vie de la gare de Marseille, la ligne de vie de la gare de Paris, la ligne de vie d'un train partant au même moment mais allant un peu plus vite, et la ligne de vie d'un train partant en sens contraire. Déterminer géométriquement l'endroit et la date à laquelle deux de ces trains se rencontrent.

Question 2.

On modélise un mobile par sa ligne de vie (c'est à dire qu'on veut interpréter toutes les propriétés du mobile en termes de sa ligne de vie). Donner une définition en terme de ligne de vie du fait qu'un mobile est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

Cette notion dépend-t-elle du référentiel choisi ? [2]

Question 3.

Proposer une définition en terme de ligne de vie qui signifie qu'un mobile est en mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel donné.

Cette notion dépend-t-elle du référentiel choisi ?

Question 4.

On dit qu'un référentiel $\mathcal{R}$ est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel $\mathcal{R}'$ si tout mobile immobile dans $\mathcal{R}$ est en mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}'$. [3] Démontrer que tous les référentiels sont en mouvements rectilignes uniformes les uns par rapports aux autres.[4]

II. Forme de Lorentz

La relativité restreinte postule que l'espace-temps E est muni d'une forme quadratique L appelée *forme de Lorentz*. Dans certains référentiels privilégiés (l'équivalent des bases orthonormées), cette forme s'écrit $L(\vec{v}) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ où les coordonnées de $\vec{v}$ dans le référentiel en question sont $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, et c est la vitesse de la lumière (3×10^8m/s).

Définition. *Un référentiel* $\mathcal{R} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ *est* privilégié *si* $L(xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$.

[2] Il apparaît déjà ici que tous les référentiels ne donneront pas une notion correcte d'espace et de temps (et d'immobilité). Voir la deuxième partie.

[3] ne pas perdre de vue que par définition, un référentiel est une base de l'espace-temps E

[4] Cela signifie en particulier que la relativité restreinte ne traite pas les référentiels accélérés. Voir la relativité générale pour cela

De fait, les coordonnées ne représentent fidèlement les notions d'espace et de temps que si le référentiel est privilégié. Ces référentiels privilégiés, tous en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, sont souvent appelés des référentiels *gallliléens*. Le postulat de la relativité restreinte est que c'est la forme de Lorentz qui caractérise la géométrie de l'espace-temps, en d'autres termes, que les lois de la physique s'exprimeront de la même manière dans tous les référentiels privilégiés.

Note fondamentale. Tout cela signifie en particulier que si A et B sont deux points de l'espace temps E, $L(\overrightarrow{AB})$ a une valeur indépendante de tout référentiel. Si on change de référentiel, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ changeront, l'écriture de L en fonction des coordonnées aussi, mais $L(\overrightarrow{AB})$ ne changera pas.[5]

Définition. *Soit $\mathcal{R}$ un référentiel privilégié, et soient A et B deux points de l'espace-temps E de coordonnées* $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ t_A \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ t_B \end{pmatrix}$ *dans $\mathcal{R}$. On définit la* distance *entre A et B dans $\mathcal{R}$ par*

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

*L'*intervalle de temps *séparant A et B dans $\mathcal{R}$ est par définition $t_B - t_A$.*

Postulat. *La relativité restreinte postule que le temps et la distance mesurés (et ressentis) par un observateur immobile dans le référentiel $\mathcal{R}$ entre deux évènements A et B sont justement la distance et l'intervalle de temps dans $\mathcal{R}$ comme définis au dessus.*

Dans le cadre du bébé modèle, on note en général x et t les coordonnées dans un référentiel privilégié (e_1, e_2), et dans un tel référentiel, L s'exprime sous la forme $L(\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}) = x^2 - c^2t^2$. La distance entre A et B est alors donnée par $d(A,B) = \sqrt{x_B^2 - x_A^2} = |x_B - x_A|$, et l'intervalle de temps les séparant est toujours $t_B - t_A$.

Question 1.

On pourra traiter cette question dans le cadre du bébé modèle.

Définition. *On dit qu'un vecteur u est de type temps si $L(u) < 0$, de type espace si $L(u) > 0$. Si $L(u) = 0$ on dit que u est de type lumière. L'ensemble des vecteurs de type lumière s'appelle le* cône de lumière*.*

Dessiner les zones de E qui correspondent à des vecteurs de type espace, de type temps et de type lumière. Le type d'un vecteur dépend-il du référentiel ?

Les vecteurs directeurs des lignes de vies des trains considérés plus tôt sont de quel type ?

Si (e_1, e_2, e_3, e_4) est un référentiel privilégié, quels sont les types des quatres vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 ?

[5] De manière analogue, la longueur d'une tige AB ne dépend pas de la base de l'espace choisie, même si les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'expression du produit scalaire en fonction des coordonnées dépendent de la base...

Question 2.

Reprendre le dessin des lignes de vie des trains. On suppose que le référentiel fixe par rapport à la terre est privilégié. Comment lit-on la vitesse v du train sur le dessin ? Donner une définition de la vitesse dans $\mathcal{R}_0$ d'un mobile en mouvement rectiligne uniforme en terme de sa ligne de vie.

La vitesse dépend-elle du référentiel dans laquelle on la calcule ?

Question 3.

On se replace dans l'espace-temps de dimension 4. Supposons qu'un mobile en mouvement rectiligne uniforme aille à la vitesse de la lumière dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ (en d'autres termes, $v = c$) Comment cela se traduit-il en termes de sa ligne de vie ?

Cette notion (le fait d'aller à la vitesse de la lumière) dépend-elle du référentiel considéré ?

Question 4.

Soit l la forme polaire de L. Soit $\mathcal{R} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ un référentiel privilégié, et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace temps. Exprimer les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}$ en fonction de $l(u, e_i)$.

Question 5.

Dans la suite, on se place à nouveau dans le bébé modèle. Chercher quel est le référentiel privilégié $\mathcal{R} = (u_1, u_2)$ que considèrerait un observateur dans un train Paris-Marseille se déplacant à vitesse v par rapport à la terre. En d'autres termes, trouver un référentiel privilégié $\mathcal{R}$ dans lequel le train est immobile (voir question I.2).([6])

Question 6.

Soit P et P' les deux points de E de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}_0$ représentant la position dans l'espace-temps de la gare de Paris aux temps $t = 0$ et $t = T$. Calculer la distance et l'intervalle de temps séparant P et P' dans $\mathcal{R}_0$.

Calculer les coordonnées de P et P' dans $\mathcal{R}$ et en déduire la distance et l'intervalle de temps séparant P et P' dans $\mathcal{R}$.

La distance entre deux points est elle indépendante du référentiel ?

Question 7.

Quel est l'ensemble des points de E simultanés à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ relativement à $\mathcal{R}$? Dessiner cet ensemble sur le dessin. Le fait que deux événements soient simultanés dépend-il du référentiel ? (Si oui préciser pourquoi. Si non, donner un exemple).

[6] Réponse : on trouve $u_2 = \gamma \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_1 = \pm\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ v/c^2 \end{pmatrix}$ avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Question 8. Loi de composition des vitesses.

On considère deux trains T et T' allant à des vitesses v et v' par rapport à la terre. Soient (u_1, u_2) et (u'_1, u'_2) les référentiels privilégiés fixes par rapport à ces deux trains.

Trouver les coordonnées d'un vecteur directeur de la ligne de vie du train T' dans la base (u_1, u_2).

En déduire la vitesse du train T' dans le référentiel lié à T. Cette formule pour la vitesse relative de deux mobiles s'appelle la loi de composition des vitesses.

Vérifier que lorsque v et v' sont petites devant c, la vitesse obtenue est proche de $v - v'$.

III. Le paradoxe des jumeaux de Langevin.

On peut formuler le paradoxe de la façon suivante. Deux jumeaux (du même âge !) sont à Paris. L'un des deux jumeaux, disons Albert, décide de faire un aller-retour Paris-Marseille alors que l'autre, Isaac, reste à Paris. Lorsqu'Albert et Isaac se retrouvent à Paris, Albert est devenu plus jeune qu'Isaac.

On veut démontrer ce résultat dans l'espace-temps de dimension 4, pas dans le bébé-modèle.

Question 1.

Faire un diagramme dans l'espace-temps de la situation (on suppose qu'Albert ne s'attarde pas à Marseille : dès qu'il est arrivé, il saute dans un train qui fait le voyage retour).

Question 2. Interprétation de la forme de Lorentz comme *temps propre*.

a. Supposons que deux points A et B de l'espace-temps correspondent à un même endroit sur terre, mais à des dates différentes (pour un observateur sur terre). Quel est la nature de $\overrightarrow{AB}$ (type temps/espace/lumière) ? Quel est le lien entre $L(\overrightarrow{AB})$ et l'intervalle de temps qui sépare A et B ?

b. Supposons maintenant qu'un train (en mouvement rectiligne uniforme) passe par deux points A et B de l'espace-temps. Du point de vue d'un voyageur du train, combien de temps faut-il pour aller de A à B ? (le calculer en fonction de $L(\overrightarrow{AB})$). Le voyageur étant dans le train, il s'agit là de l'intervalle de temps dans un référentiel $\mathcal{R}$ lié au train (c'est à dire dans lequel le train est immobile). On dit que ce temps est le temps propre du voyageur. C'est le temps qu'il mesure et qu'il ressent.

Pour la suite, on pourra admettre (ou pourquoi pas démontrer !) que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui pointent tous les deux vers le futur dans un référentiel donnés, alors on a $l(u, v) < 0$ (où l est la forme polaire de L).[7]

Question 3.

Montrer que le paradoxe des jumeaux est équivalent à une sorte d'inégalité triangulaire à l'envers. [8].

[7] pointer vers le futur dans un référentiel privilégié signifie que la 4ème coordonnée est positive.

[8] $\sqrt{-L(\overrightarrow{AC})} \geq \sqrt{-L(\overrightarrow{AB})} + \sqrt{-L(\overrightarrow{BC})}$

Question 4. Preuve du paradoxe, 1ère étape.

Démontrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ satisfont $L(\vec{u}) < 0$ et $L(\vec{v}) < 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $L(\vec{u} + t\vec{v}) \geq 0$. Quelle est l'hypothèse cruciale sur L ? *Indication : considérer le plan engendré par u et v, et faire un raisonnement similaire à celui de la preuve du Théorème d'inertie de Sylvester.*

Question 5. Preuve du paradoxe, 2ème étape.

Considérer un trinôme du second degré comme dans la preuve de l'inégalité de Cauchy Schwartz pour démontrer que $\sqrt{-L(u+v)} \geq \sqrt{-L(u)} + \sqrt{-L(v)}$ (quelles sont les hypothèses sur u et v ?) [9].

Question 6. Quelques ordres de grandeur.

Quelle erreur relative commet-on en utilisant la loi newtonnienne de composition des vitesses ($v'' = v - v'$) lorsque v et v' sont de l'ordre de la vitesse du son ($v = 3.10^2\text{m/s} = 10^{-6}c$) ?[10]

Que vaut la différence d'âge entre Albert et Isaac si Albert voyage à la vitesse du son pendant un an (deux fois 6 mois). La précision d'une horloge atomique est de l'ordre de 10^{-14} (secondes par secondes). Est-ce que cet écart est détectable avec une telle horloge atomique ?[11]

Considérons un évènement se produisant à un instant $t = 0$ sur l'étoile la plus proche du soleil (alpha du centaure à 4 années-lumière dans le référentiel de la terre). Un observateur fixe par rapport à la terre et un observateur allant à la vitesse $v = 100km/h \simeq \times 10^{-7}c$ attribueront des dates différentes à cet évènement. De combien ces dates diffèrent-elles ? Même question pour la galaxie la plus proche (le nuage de Magellan) qui se trouve 40,000 fois plus loin ? [12]

Retour sur quelques résultats importants.

Ce problème a permis de mettre en évidence plusieurs choses.

- De même que la première coordonnée d'une tige (d'un vecteur) dans un espace euclidien dépend de la base choisie (contrairement à sa longueur qui est bien définie), l'intervalle de temps séparant deux points A et B de l'espace-temps va dépendre du référentiel choisi : l'intervalle de temps n'est rien d'autre que la 4ème coordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Il en est de même pour la distance entre ces deux points. Par contre, alors que la première coordonnée d'une tige n'a pas grande signification physique, l'intervalle de temps séparant deux évènements a un sens physique important (même s'il dépend du référentiel choisi pour le mesurer). On dit que la distance et le temps entre deux évènements sont *relatifs*, c'est à dire qu'ils dépendent du référentiel dans lequel on se place pour les observer.
- Par contre *tout* n'est pas relatif. En particulier, le fait d'aller à la vitesse de la lumière ne dépend pas du référentiel choisi. Historiquement, cet absolu là (provenant des équations de Maxwell en electromagnétisme (1873) confirmées par les expériences de

[9] On utilise le fait que $u, v, u+v$ sont des vecteurs de type temps et que $l(u,v) < 0$

[10] de l'ordre de 10^{-12}

[11] On trouve 16μs. L'expérience a effectivement été réalisée (sur une durée plus courte).

[12] réponse : 12 secondes environ pour alpha proxima. 40,000 fois plus pour le nuage de magellan : 6 jours.

Michelson-Morley en 1881-1887) a joué un rôle important dans la construction de la relativité.

– Les résultats de la relativité sont parfois déroutants. Cependant, faut-il rappeler que la relativité n'est pas une théorie purement formelle ? Pour que le GPS (Global Positionning System) fonctionne correctement, il est nécessaire d'utiliser la relativité générale. En effet, le GPS est basé sur un réseau de satellites en orbite autour de la terre ayant chacun à bord une horloge atomique. Le récepteur GPS recoit des signaux emis par certains de ces satellites, mesure l'intervalle de temps séparant leur réception, et en déduit sa position dans l'espace temps (latitude, longitude, altitude et heure) avec une précision d'environ 15m=50ns. Mais les satellites se déplacent à une vitesse de 14,000km/h, bien supérieure à la vitesse du récepteur GPS, provoquant un ralentissement apparent de l'horloge embarquée. Par contre, les satellites se situent à 20,000km d'altitude où la pesanteur est quatre fois moindre qu'à la surface de la terre, d'où résulte (d'après la relativité générale) une accélération apparente des horloges embarquées. La combinaison de ces effets relativistes fait que les horloges embarquées se décalent chaque jour par rapport au temps terrestre de 38 microsecondes. Cette déviation est énorme (pour le GPS) : si on n'en tenait pas compte, des erreurs de navigations de l'ordre de 10km (=c$\times$38μs) s'accumuleraient chaque jour.

Vous pouvez aller voir la Foire Aux Questions (en anglais) sur la relativité à l'adresse suivante : `http ://www.weburbia.demon.co.uk/physics/relativity.html`.
