Passage au quotient pour une application

Source: `passage_au_quotient.tex`.
Version imprimable: `passage_au_quotient.pdf`
Théorie des ensembles, et structures de base. DEUG première année. Angle pédagogique : *Langage.*

Objectifs et commentaires. *Le but de l'exercice est d'introduire le passage au quotient d'une application dans la situation la plus simple possible : la parité dans $\mathbb{Z}$. Il est en particulier important de donner un exemple d'application qui ne passe PAS au quotient (dernière question).*

On définit une relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \ : \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ ont même parité}$$

(autrement dit, ils sont tous deux pairs ou tous deux impairs).

a. Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

b. On note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de l'entier x et $\overline{\mathbb{Z}}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par $\mathcal{R}$ (donc, l'ensemble des classes d'équivalence).

Combien y a-t-il de classes d'équivalence différentes ?

c. Soient a, b, c des entiers, et soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. On veut essayer de donner un sens a cette fonction dans $\overline{\mathbb{Z}}$, c'est à dire définir une fonction $\overline{f}(\overline{x})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}$ telle que $y = f(x)$, alors $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$.

(i). — Montrer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ pair.

(ii). — Soients a, b, c des entiers, et soit $f(x) = ax^2+bx+c$. En factorisant $f(x)-f(y)$, démontrer l'implication :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \ : \ x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x)\mathcal{R}f(y).$$

(iii). — Comment peut-on alors définir $\overline{f}$?

d. Montrer qu'il existe une application g de $\mathbb{Z}$ dans lui-même qui, à un entier x, associe $g(x) = \frac{x^2+x}{2}$. Est-il possible de définir d'une application $\overline{g} : \overline{\mathbb{Z}} \to \overline{\mathbb{Z}}$ telle que, si $y = g(x)$, alors $\overline{y} = \overline{g}(\overline{x})$?
