Problème de *fit* (moindres carrés).

Source: `probleme_de_fit.tex`.
Version imprimable: `probleme_de_fit.pdf`
Algèbre linéaire. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *À quoi ça sert.*

Objectifs et commentaires. *Faire retrouver à l'étudiant la méthode des moindres carrés sur un exemple. Beaucoup d'étudiants ont du mal à travailler dans l'espace de dimension 4 et n'arrivent pas à se détacher du dessin (plan) fait dans la première question. Ce genre de problème peut aussi amener les étudiants à comprendre que, pour modéliser des situations concrètes, il faut parfois se placer dans des espaces de dimension plus grande que 3.*

Vous avez une batterie. Vous voulez déterminer ses caractéristiques : force électromotrice E et résistance interne r. Cela signifie que vous cherchez à modéliser cette batterie par un dipole tel que $U = E - rI$ (où U est la différence de potentiel entre les deux bornes du dipole, et I est l'intensité le traversant).

Vous faites donc une série de mesures. Vous trouvez les résultats suivants :

Mesure N°	1	2	3	4
Intensité mesurée (A)	0	0,1	0,4	1
Tension mesurée (V)	12	11	7	1

a. Faire un dessin. Peut-on trouver E et r de sorte que le modele soit exact ? Donner une justification géométrique.

b. On pose $X = \begin{pmatrix} E \\ r \end{pmatrix}$. Écrire les équations qui doivent être satisfaites par E et r (pour que le modèle soit exact) sous la forme $A.X = b$ où A est une matrice, et b un vecteur. Donner une justification algébrique de la question précédente.

c. On cherche donc E et r (c'est à dire X) de sorte que le modèle soit *le meilleur possible* vis à vis des données disponibles. Pour nous, *le meilleur modèle possible* sera celui pour lequel $||AX - b||^2$ est minimum. (On aurait pu choisir une autre définition, mais celle-là est la plus simple à résoudre. On l'appelle souvent : *les moindres carrés*.) Expliciter la valeur de $||AX - b||^2$ et traduire plus concrètement la condition des moindres carrés.

d. Démontrer que X_0 réalise le minimum de la fonction $X \mapsto ||A.X - b||^2$ si et seulement si $A.X_0 - b$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\, A$.

e. Montrer que $(\mathrm{Im}\, A)^\perp = \ker {}^t A$.

f. En déduire l'unique vecteur $Y \in \mathrm{Im}\, A$ tel que $||Y - b||^2$ soit minimum.

g. Trouver la meilleure solution approchée du système.

h. Autre probleme de fit. Maintenant vous avez un échantillon formé de trois composés radioactifs A, B, C (et d'autres composés non radioactifs). Vous connaissez leurs demi-vies : par exemple $\tau_A = 1$ jours, $\tau_B = 3$ jours et $\tau_C = 10$ jours. On cherche à déterminer la composition initiale de l'échantillon. Le nombre de désintégrations par seconde de A s'écrit donc $d_A = N_A 2^{-t/tau_A}$ où N_A est le nombre initial d'atomes A. Vous mesurez le nombre de désintégrations par seconde dans l'échantillon (avec un compteur Geiger) au cours du temps. **Question :** trouver les valeurs de N_A, N_B et N_C qui correspondent le mieux aux mesures effectuées.

Temps (jours)	0	1	2	3	4
Nombre de désintégrations par secondes ($\times 10^9$)	10	2,7	1,3	0,6	0,3