Exercices Alternatifs

Plusieurs questions sur un système.

Source: `questions-systeme.tex`.

Version imprimable: `questions-systeme.pdf`

Algèbre linéaire. DEUG première année. Angle pédagogique : *Méta-mathématiques.*

Objectifs et commentaires. *Le but de cet exercice, est de mettre en évidence le fait qu'il y a* plusieurs *questions à se poser sur un système d'équations à part sa résolution.*

Lorsqu'on a un système d'équations, il n'y a pas que sa résolution qui est intéressante. On peut se poser d'autres questions : est-ce que le système admet au moins une solution ? Est-ce qu'il en admet une unique ?

a. On considère le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & a \\ x-y-z-t & = & b \\ -x-y\ \ +t & = & c \\ -3x+y-3z-7t & = & d \end{array}\right.$$

1. A quelle condition (S) admet-il une solution ?
2. Montrer que si $a, b, c, d > 0$ alors (S) n'a pas de solution.
3. Quel est l'ensemble des solutions du système homogène associé ?

b. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(X) = A.X$.

1. Calculer $f(X)$. Montrer que f est linéaire.
2. Quelle est sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?
3. f est-elle surjective ? injective ? Trouver l'image et le noyau de f.
4. f est-elle inversible ?
5. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'image de f ? au noyau de f ?

c.

1. Le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'espace vectoriel engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$?
2. Ces 4 vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?
