Exercices Alternatifs

Quizzes d'algébre linéaire

Source: `quizzes_alglin.tex`.

Version imprimable: `quizzes_alglin.pdf`

Algèbre linéaire. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *Quizz.*

Objectifs et commentaires. *Comment faire en sorte que les étudiants apprennent leur cours ? Le but de ces petits exercices est de donner des petites questions aux étudiants pour les aider à travailler le cours de manière active, en se posant des questions.*

La méthode utilisée pour poser ces quizzes, inspirée par Myriam Deschamps à Orsay, est la suivante : Le quizz est distribué aux étudiants à l'avance. Ensuite, à une date convenue à l'avance, on distribue 3 questions extraites de ce quizz. Les étudiants ont un quart d'heure pour y répondre.

Cette méthode a l'avantage d'être bien acceptée par les étudiants (en général, ils jouent le jeu et travaillent ces questions) et de les aider à aborder le cours.

Ces quizzes ont été donnés à des étudiants de DEUG SMa, pour un module traitant des déterminants, diagonalisation des endomorphismes, formes quadratiques et diagonalisation des matrices symétriques.

I. Quizz de rappels

Répondre par OUI ou par NON aux questions suivantes et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple, selon le cas. Dans ce qui suivra, E est un K-espace vectoriel et $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(1). — Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $Vect(u, v) = Vect(u + v, u - v)$.

(2). — Les nombres complexes $1 + i$ et $1 - i$ engendrent $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(3). — Il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $Vect(u) = \mathbb{R}^2$.

(4). — Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $F + H = G + H$. Alors $F = G$.

(5). — Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, alors $F + (-F) = \{0\}$, où $-F := \{-x \,|\, x \in F\}$.

(6). — $\{\lambda(X^2 + i),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$.

(7). — $(1, 0, 0) + Vect\{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(8). — Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs deux à deux non-colinéaires. Alors ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

(9). — L'ensemble des solutions (x, y, z) du système linéaire $\begin{cases} x - y - z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \end{cases}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(10). — L'ensemble des solutions (x, y, z, t) du système linéaire $\begin{cases} x - y - z + t &= 1 \\ 2x - 3y + z + t &= 0 \end{cases}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(11). — Soit A une partie non-vide de E. Il existe un sous-espace vectoriel de E contenant A.

(12). — $\mathbb{Z}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(13). — $\{0\}$ et $\emptyset$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$.

(14). — Un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(10, 12, 15)$ est donné par

$$\begin{cases} 3x - 2z &= 0 \\ -3x + 5y - 2z &= 0 \end{cases}$$

(15). — Le système en x, y, z, t suivant admet trois variables principales :

$$\begin{cases} x - y - z + 3t &= 5 \\ 2x - y - 4z + 9t &= 16 \\ x - 4z + 5t &= 15 \\ x - y - 7z + 7t &= 25 \end{cases}$$

(16). — Une matrice ayant des entrées non-nulles ne peut pas se transformer en une matrice ayant toutes les entrées nulles, par une suite finie d'opérations élémentaires sur ses lignes.

(17). — La direction de la droite affine $\{(1 + 3t, 4 + 5t, -1 - t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ est donnée par le vecteur $(1, 4, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(18). — Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $(F + G) \cup F$ est un sous-espace vectoriel de E.

(19). — Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$, non tous nuls. L'équation linéaire $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ admet une et une seule inconnue principale.

(20). — On utilise les mêmes notations que pour la question 19. L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ est un sous-espace vectoriel engendré par $n - 1$ vecteurs.

II. Quizz sur les déterminants

Dans ce qui suit, toutes les matrices considérées sont des matrices carrées.

(1). — Soit M' la matrice obtenue à partir d'une matrice M par l'opération $L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$. Alors $\det(M) = \det(M')$.

(2). — Si deux systèmes d'équations linéaires homogènes ont le même déterminant, alors les espaces de solutions des deux systèmes ont la même dimension.

(3). — Quelles que soient A, B deux matrices d'ordre n, on a $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

(4). — Supposons que M et M' sont deux matrices carrées telles qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = M'X$. Peut-on en déduire que $\det(M) = \det(M')$.

(5). — S'il existe $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = M'X$, peut-on en déduire que $\det(M - M') = 0$.

(6). — $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \det(\lambda M) = \lambda \det(M)$

(7). — Pour tous $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, on a $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3 ..., v_n) = \det_{\mathcal{B}}(v_1 - v_2, v_2 - v_1, v_3, ..., v_n)$

(8). — Si E est un espace vectoriel de dimension 4, alors quels que soient $v_1, v_2 \in E$, on a $\det_{\mathcal{B}}(v_1 - v_2, 3v_1 + 5v_2, 2v_1 - 4v_2, 7v_1 - 3v_2) = 0$.

(9). — L'équation en $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1 + xv, v_2, ..., v_n) = 0$$

possède une unique solution si et seulement si v n'appartient pas à l'espace vectoriel engendré par $v_2, ..., v_n$.

(10). — Si $\forall v \in E, \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v) = 0$, alors $(v_1, ..., v_{n-1})$ est liée.

(11). — Supposons $n = 3$. Alors $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = \det_{\mathcal{B}}(v_2, v_3, v_1)$

(12). — Soit v un vecteur d'un espace vectoriel E de dimension n. Si $\det(v_1 + v, v_2, ..., v_n) = \det(v_1, ..., v_n)$, alors $v \in vect(v_2, .., v_n)$.

(13). — Si le déterminant d'une famille de n vecteurs de E est nul dans une base donnée, alors il est nul dans n'importe quelle base.

(14). — Si le déterminant d'une famille de n vecteurs de E est positif dans une base donnée, alors il est positif dans n'importe quelle base.

(15). — Si le déterminant d'une application linéaire est positif dans une base donnée, alors il est positif dans n'importe quelle base.

(16). — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Si $\det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = 0$ est nul quels que soit la famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$, alors $\det f = 0$.

(17). — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Si il existe une famille de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ tels que $\det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = 0$ alors $\det f = 0$.

(18). — Le déterminant d'une projection dans $\mathbb{R}^3$ est toujours égal à 1.

(19). — Le déterminant d'une symétrie est toujours égal à 1 ou -1.

(20). — Le déterminant d'une homothétie de $\mathbb{R}^4$ est toujours positif.

III. Quizz sur diagonalisation des endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension n, T et T' des endomorphismes de E, A, B, P des matrices carrées $n \times n$.

(1). — Un endomorphisme ayant une valeur propre non nulle est toujours inversible.

(2). — Si un endomorphisme n'a pas de valeur propre, alors il est inversible.

(3). — Si $T : E \to E$ n'a pas de valeur propre, T ne peut pas être diagonalisable. (question subsidiaire : et si T en a une seule ?)

(4). — Soit $T : E \to E$ l'homothétie de rapport λ (par définition, pour tout $v \in E$, $T(v) = \lambda v$). Y-a-t-il des bases dans lesquelles la matrice de T n'est pas diagonale ?

(5). — Si T est diagonalisable, sa matrice est diagonale dans n'importe quelle base.

(6). — Si λ est valeur propre de T, alors λ^n est valeur propre de T^n.

(7). — Si λ est valeur propre de T et μ valeur propre de T' alors $\lambda + \mu$ est valeur propre de $T + T'$

(8). — Si λ est valeur propre de T et μ valeur propre de T' alors $\lambda\mu$ est valeur propre de $T \circ T'$

(9). — Si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 3\lambda + 1$ est valeur propre de $A^2 + 3A + \mathrm{I_n}$.

(10). — Si T est diagonalisable, alors T^2 est forcément diagonalisable

(11). — Si T^2 est diagonalisable alors T est forcément diagonalisable

(12). — Si A est diagonalisable alors pour toute matrice P inversible, AP est diagonalisable

(13). — Si A est diagonalisable alors pour toute matrice P inversible, PAP^{-1} est diagonalisable

(14). — Si A est diagonalisable et si $A^2 = 0$ alors $A = 0$.

(15). — Soit f un endomorphisme de E, soit A la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ et A' la matrice de f dans une base $\mathcal{B}'$. Alors A et A' ont les mêmes valeurs propres.

(16). — Avec les notations au dessus, A et A' ont les mêmes vecteurs propres.

(17). — Supposons que T et T' sont diagonalisables. Si T et T' ont les mêmes espaces propres, alors $TT' = T'T$.

(18). — Soit v un vecteur propre de T de valeur propre non nulle. Alors $T(v)$ est un vecteur propre de T.

(19). — Supposons qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que $Mat_{B,B'}(T)$ soit diagonale. Alors T est diagonalisable.

(20). — Soit A une matrice diagonalisable. Alors, l'application de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $T(X) = A.X$ est diagonalisable.

IV. Quizz sur les formes quadratiques

(1). — Le noyau d'une forme quadratique est un espace vectoriel.

(2). — La somme de deux vecteurs isotropes est un vecteur isotrope.

(3). — Si $q(v_1) > 0$ et $q(v_2) > 0$ alors $q(v_1 + v_2) > 0$.

(4). — Supposons que q n'a pas de vecteur isotrope. Alors q ou $-q$ est un produit scalaire.

(5). — Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et sur d_2. Alors q est définie positive.

(6). — Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et définie négative sur d_2. Alors q est de signature $(1, 1)$.

(7). — La somme de deux formes quadratiques définies positives est définie positive.

(8). — La somme de deux formes quadratiques de signature $(1, 1)$ est une forme quadratique de signature $(1, 1)$.

(9). — Une forme quadratique bornée est nulle

(10). — Si f et g sont deux formes linéaires, alors $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire.

(11). — Le produit de deux formes bilinéaires est une forme bilinéaire.

(12). — Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors $(x, y) \mapsto f(x)f(y)$ est un produit scalaire.

(13). — Soient q et q' deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ ayant la même signature. Alors il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que $Mat_{\mathcal{B}}(q) = Mat_{\mathcal{B}'}(q')$.

(14). — Soient q et q' deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ telles qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ avec $Mat_{\mathcal{B}}(q) = Mat_{\mathcal{B}'}(q')$. Alors q et q' ont la même signature.

(15). — La signature de la forme quadratique $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ sur $\mathbb{R}^3$ est $(3, 0)$.

(16). — Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors le déterminant de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.

(17). — Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors le rang de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.

(18). — Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors la trace sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.

(19). — Soit T un automorphisme de E, q une forme quadratique, et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit A la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$, et Q la matrice de q dans cette même base.

Alors la matrice de la forme quadratique $q \circ T$ dans la base $\mathcal{B}$ est égale à QA.

(20). — Avec les notations au dessus, la signature de q est égale à celle de $q \circ T$.
