Exercices Alternatifs

Manipulation du Signe Somme

Source: `signe-somme.tex`.
Version imprimable: `signe-somme.pdf`
Séries. DEUG deuxième année. Angle pédagogique : *Langage.*

Objectifs et commentaires. *Décomplexer les étudiants face à ce signe nouveau. Les faire réfléchir sur les variables locales (on dit parfois "muettes") et globales, et sur les changements d'indice. Ces exercices semblent être un préliminaire indispensable à l'étude des séries, d'autant plus qu'ils posent de réels problèmes aux étudiants.*

Suggestion : l'idéal serait que les étudiants s'approprient vraiment ce symbole. Pour ça, un moyen consiste à leur faire inventer des formules l'utilisant... Exercice à compléter !

Question 1 : écriture avec ou sans signe $\sum$.

a. Ecrire sans $\sum$:

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n, \quad \sum_{p=1}^{n} p, \quad \sum_{p=1}^{n} n, \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p}$$

b. Ecrire avec $\sum$:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Question 2 : variables de comptage. Les égalités suivantes sont-elles vraies :

$$\sum_{p=1}^{n}(p \times n) = \sum_{k=1}^{n}(k \times n) = n \times \sum_{k=1}^{n} k = k \times \sum_{k=1}^{n} n$$

Question 3 : substitution. Soit

$$S_n = \sum_{p=1}^{2n^2} \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

c. Combien y a-t-il de termes dans cette somme ?

d. Ecrire la somme S_{2n}. Combien contient-elle de termes ?

e. Soit S_{2n}^{impair} la somme des termes de S_{2n} d'ordre impair (obtenus pour p=1, 3, 5, ...). On définit de même S_{2n}^{pair} ; on a donc $S_{2n} = S_{2n}^{\text{impair}} + S_{2n}^{\text{pair}}$. Ecrire les sommes S_{2n}^{pair} et S_{2n}^{impair}.

Question 4. Calculez les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} p, \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} k, \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k} n.$$

Question 5. Soit

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+N}.$$

De quelle série est-ce la somme partielle ?
