Sommes de racines cinquièmes de l'unité

Source: `sommes_de_racines.tex`.

Version imprimable: `sommes_de_racines.pdf`

Nombres complexes. DEUG première année. Angle pédagogique : *Expérimental.*

Objectifs et commentaires. *Expérimenter, visualiser des sommes de nombres complexes, utiliser les propriétés du groupe des racines de l'unité (somme nulle, invariance par rotation).*

On considère l'ensemble des racines cinquièmes de l'unité. On en choisit certaines (entre une et cinq !), on fait leur somme, et on prend le module de cette somme.

Quel est le plus grand nombre que l'on peut obtenir de cette manière ?

Autrement dit, si U_5 désigne l'ensemble des racines cinquièmes de l'unité, la question consiste à calculer le nombre suivant :

$$\mathrm{Max}\left\{\left|\sum_{w\in E} w\right| \text{ avec } E \subset U_5\right\}.$$

Suggestions

- Rassemblez vos connaissances sur les racines $n$ièmes de l'unité ;
- expérimentez : représentez quelques-unes des sommes impliquées dans le problème ; pouvez-vous les calculer ? Faites une conjecture, prouvez la conjecture !

Généralisation Généralisez l'énoncé précédent. Essayez de deviner la réponse au problème généralisé. Prouvez votre conjecture...
