Exercices Alternatifs

Classés par niveau.

9 mars 2007

Résumé

Les exercices de maths actuellement proposés aux étudiants en DEUG accordent une place disproportionnée à l'aspect technique. Mais les exercices "alternatifs" sont difficiles à trouver ou à concevoir. La base de donnée *EXEMAALT* veut mettre à la disposition de tous les enseignants les efforts de chacun. Nous suggérons l'adoption de la "règle" suivante, qui obligerait à un renouvellement minimal mais constant : *chaque feuille d'exercices qu'un enseignant propose aux étudiants doit comporter au moins un exercice inventé (ou en tout cas largement reformulé) par l'enseignant.*

ENVOYEZ-NOUS VOS EXERCICES ![1]

Ce recueil d'exercices est disponible sur le Web, sous différents formats, à l'adresse suivante :

`matexo.emath.fr/exemaalt`

Pour plus de détails sur les objectifs d'EXEMAALT, voir le texte d'exposé des motivations : *EXEMAALT, un serveur d'exercices de maths "alternatifs" : pour quoi faire ?* disponible sur le serveur.

Précisons que *ce recueil est destiné aux enseignants*, et que son but est plus de proposer des pistes et des idées que des exercices figés (les exercices devant la plupart du temps être reformulés en fonction du contexte). Enfin, il s'agit d'un recueil en gestation, qui grossit au fur et à mesure que vous nous envoyez des exercices : certains thèmes du programme de DEUG peuvent donc être (momentanément...) absents.

Table des matières

[1] au format LaTeX, à l'adresse suivante : *exemaalt@acm.emath.fr* ; un fichier modèle et des explications sont disponibles sur le serveur.

[2] http://garp.univ-bpclermont.fr/guilde/Guilde/Licence/ldl.html

Niveau I : DEUG première année

I.1. Allure du graphe d'une fonction

Source: `allure-de-fonctions.tex`.
Version imprimable: `allure-de-fonctions.pdf`
Angle pédagogique : *Visualisation. Fonctions d'une variable réelle*

Objectifs et commentaires. *Au lycée, l'Analyse consiste surtout à étudier des fonctions, et l'étude d'une fonction consiste surtout à calculer sa dérivée pour obtenir son tableau de variation. Ceci a un effet pervers : en général, les étudiants pensent que c'est la seule façon d'avoir une idée de l'allure du graphe d'une fonction (à part la méthode calculatrice...). Pourtant, cette méthode n'est pas très efficace, puisqu'il arrive souvent qu'on ne puisse pas déterminer le signe de la dérivée ; d'autre part, souvent on peut dire bien des choses par des considérations géométriques à partir de la formule qui définit la fonction...*

Le but de cet exercice est d'apprendre à tracer l'allure de fonctions ***sans calculer de dérivée****, en partant des "briques de base" à partir desquelles la fonction est construite.*

Tracer l'allure des graphes des fonctions suivantes (sur l'intervalle $[-6\pi, 6\pi]$, par exemple), sans effecter de calculs, puis vérifier votre dessin sur une calculatrice graphique.

1. $f_1 : x \to x\sin(x)$. **Aide :** Montrer que $-x \leq f_1(x) \leq x$; pour quelles valeurs de x a-t-on $f_1(x) = x$? $f_1(x) = -x$? $f_1(x) = 0$? Placer ces points, puis compléter rapidement le graphe.
2. $f_2 : x \to x^2 \sin(x)$. **Aide :** suivre la même démarche.
3. $f_3 : x \to \sin(x) + x$.
4. $f_4 : x \to \sin(x) + x^2$.
5. $f_5 : x \to | \sin(x) |$.
6. $f_6 : x \to \exp(\sin(x))$.
7. $f_7 : x \to | \sin(x) | +x$.
8. (*) $f_8 : x \to (\sin(x))^2$.
9. (*) $f_9 : x \to \exp(x\sin(x))$.

I.2. Approximations affines *(Nouveau)*

Source: `approximations-affines.tex`.
Version imprimable: `approximations-affines.pdf`
Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Fonctions de plusieurs variables réelles*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice classique montre comment on peut utiliser la formule de Taylor pour estimer les petites variations d'une fonction de deux variables, dans des cadres très concrets. Les trois premières questions utilisent la formule à l'ordre 1, la dernière à l'ordre 2. La question sur le cône est plus difficile parce qu'elle utilise la notion d'incertitude relative.*

Question 1. Petites variations de la diagonale d'un carré

a. Donner l'expression de la diagonale $d(x, y)$ d'un rectangle de côtés x et y.

b. On considère un rectangle de côtés $x = 30cm$ et $y = 40cm$. En utilisant l'approximation affine de d (c'est-à-dire en négligeant le reste dans la formule de Taylor), donner une estimation de la variation de d lorsque x augmente de 4mm et y diminue de 1mm (sans utiliser la calculatrice !). Calculer la longueur de la nouvelle diagonale à la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

Question 2. Petites variations de la surface d'une boîte

On considère un container en carton de volume $1m^3$, dont la base a pour dimension $x = 2m$ et $y = 1m$. On veut fabriquer un deuxième container en carton de même volume, avec une base de côtés 195cm et 95cm. Donner (sans calculatrice) une estimation de la différence de surfaces extérieures entre les deux containers à l'aide l'approximation affine. Calculer la nouvelle surface à l'aide de la calculatrice, et comparer avec l'estimation.

Question 3. Petites variations du volume d'un cône

On mesure le rayon r et la hauteur h d'un cône, avec une incertitude de 3% sur le rayon, et de 2% sur la hauteur. Évaluez l'incertitude sur le volume $V(r, h) = \pi r^2 h/3$ du cône, à l'aide de l'approximation affine.

Question 4. Approximation quadratique

La surface $S(x, y)$ d'un container en carton de volume $1m^3$ dont la base a pour dimension x, y est la fonction

$$S(x, y) = 2xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}.$$

On considère le container de volume $1m^3$ dont la base a les dimensions $x = 1m$ et $y = 1m$ (c'est donc un cube). On veut estimer la variation de surface lorsque le côté x augmente de $5cm$, et le côté y diminue de $10cm$.

a. Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 1 au point $(1, 1)$. Peut-on en déduire une estimation de la variation ?

b. Répondre au problème en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2, et en supposant que le reste est négligeable devant les autres termes.

c. Calculer la variation à la calculatrice, et comparer avec votre estimation.

I.3. Bataille navale linéaire

Source: `Bataille-navale-lineaire.tex`.

Version imprimable: `Bataille-navale-lineaire.pdf`

Angle pédagogique : *Ludique. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Dans cette activité, on utilise un jeu de type "bataille navale" pour amener les étudiants à se poser des questions sur la géométrie des sous-espaces vectoriels, et plus particulièrement sur la dimension.*

Réalisation pratique *Notons d'abord que contrairement à ce qu'on peut penser au premier abord, le jeu ne nécessite pas beaucoup de calculs, puisqu'on peut répondre à la plupart des questions à l'aide d'arguments de dimension : évidemment, l'un des buts de l'exercice est d'inciter les étudiants à utiliser ces raisonnements.*

On suggère de grouper les étudiants par quatre, et de les faire jouer deux contre deux (et éventuellement plus tard quatre contre quatre). Par rapport à un affrontement "un contre un", ces configuration ont l'avantage de favoriser la confrontation des idées : le fait de ne pas être d'accord sur le coup à jouer devrait obliger les étudiants à justifier leurs propositions, donc à jouer plus rationnellement, voire à chercher une bonne stratégie. Et aussi, ceci diminue la fréquence des erreurs...

Il vaut probablement mieux commencer par jouer dans $\mathbb{R}^3$, où l'intuition aide beaucoup. Mais il serait dommage de ne pas jouer aussi dans $\mathbb{R}^4$, où l'étudiant doit justement remplacer son intuition défaillante par les raisonnements sur la dimension.

On peut préciser les règles au fur et à mesure des parties ; on suggère les règles additionnelles suivantes :

- *un joueur qui détecte une erreur dans la réponse de son adversaire à l'une de ses questions gagne la partie (y compris si la détection intervient longtemps après l'erreur) ;*
- *le joueur qui se trompe en annonçant la dimension perd la partie ;*
- *un joueur est autorisé à modifier son sous-espace vectoriel secret en cours de partie (y compris après que l'autre ait proposé une dimension) à condition toutefois que son nouveau sous-espace secret reste compatible avec ses réponses précédentes. L'intérêt de cette règle est d'obliger le joueur qui prétend avoir trouvé à être sûr de lui (et donc à chercher à démontrer que la dimension est ce qu'il pense). On pourrait aussi demander explicitement au gagnant, à la fin de la partie, de fournir une preuve que la dimension est ce qu'il affirme (mais ceci risque de rendre l'activité plus scolaire et moins ludique, ce qui est dommage).*

Complexité algorithmique *Après un peu de pratique, on peut suggérer aux étudiants de chercher un algorithme, par exemple en leur demandant comment on pourrait programmer un ordinateur pour qu'il trouve la réponse en temps fini dans tous les cas. Ceci est probablement assez difficile en DEUG, sans parler de la recherche d'une stratégie optimale : on peut ainsi transformer le jeu en un exercice de niveau licence... Voici des éléments de réponses (en note de bas de page pour ne pas contrarier le lecteur qui voudrait y réfléchir tout seul!).* [3]

[3] **Quelques remarques sur la complexité** Pour un champ de bataille E de dimension n, quel est le nombre de coups nécessaires pour répondre dans tous les cas ? Voici une stratégie qui marche toujours en

Ce jeu est inspiré d'une bataille navale géométrique (non linéaire) proposée par Nicolas Bouleau dans le texte de sa conférence au colloque EM2000 sur l'enseignement des maths, Y a-t-il lieu d'envisager des mathématiques post-modernes? *(http://em2000.imag.fr/Actes/). Citons le texte d'origine, qui peut inspirer d'autres exercices :*

"... Chaque élève d'un binôme définit une figure géométrique (par exemple constituée d'un cercle et de deux droites) dans un système de coordonnées. Pour deviner la figure de son adversaire, il tire des droites et non des points. Si à son tour de jouer, il propose ainsi la droite $y = 2x + 1$, son adversaire lui indique tous les points d'intersection de sa figure avec $y = 2x + 1$, etc. Il y a de multiples variantes suivant les figures cachées et les objets qu'on tire, la déduction et la combinatoire ne sont pas absentes de ce jeu qui peut s'organiser en tournoi comme les échecs."

La bataille navale linéaire est un jeu qui se joue à deux joueurs, dans lequel chacun doit découvrir la dimension d'un sous-espace vectoriel caché par l'autre.

Expliquons les règles en détail. On décide d'abord du champ de bataille : il s'agit d'un espace vectoriel E de dimension finie (par exemple $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$). Chaque joueur choisit en secret un sous-espace vectoriel de E (on notera E_1 et E_2 ces deux sous-espaces). Commence alors la phase de jeu proprement dite : le premier joueur suggère un sous-espace vectoriel F de E ; le second lui répond

- "touché" si le sous-espace proposé a une intersection non triviale avec le sous-espace caché (autrement dit, si $F \cap E_2$ n'est pas réduit à $\{0\}$) ;
- "dans l'eau" sinon.

C'est alors au tour du second de faire une proposition, et le jeu continue ainsi jusqu'à ce que l'un des deux joueurs trouve la **dimension** du sous-espace choisi par l'autre.

On précise que chaque joueur est libre de choisir son sous-espace secret et les sous-espaces qu'il propose de la manière qui lui convient (par exemple, à l'aide d'un système d'équations cartésiennes ou bien d'une base).

I.4. Bouteilles impossibles à vider.

---

moins de n coups.

On choisit une base $B = \{e_1, .., e_n\}$. On regarde les parties F contenues dans B telles que $\text{vect}(F) \cap E_1 = \{0\}$ (où E_1 est l'espace inconnu). On note $\mathcal{F}$ l'ensemble de ces parties.

Lemme *Une partie maximale dans $\mathcal{F}$ est de dimension $n - \dim(E_1)$.*

Donc on cherche une partie maximale. L'algorithme est le suivant. On pose la question "$F = \text{Vect}(e_1)$?" Si la réponse est "à l'eau", on prend $F_1 = \{e_1\}$; si c'est "touché", on prend $F_1 = \emptyset$. Puis on continue : à l'etape i, on pose la question "$F = vect(F_{i-1} \cup \{e_i\})$?", et on prend $F_i = F$ si "à l'eau", $F_i = F_{i-1}$ si "touché". Le n-ième ensemble F_n est maximal : en effet, le i-ième ensemble F_i est maximal pour l'ajout d'un des i premiers vecteurs (*i. e.* si on rajoute un des i premiers vecteurs à F_i, on touche E_1).

Remarquons aussi la différence entre le "presque sûr" et le "sûr" : si on fait une dichotomie sur la dimension (en proposant d'abord un espace de dimension $n/2$, *etc.*), on va trouver la dimension en temps $\log(n)$ pour presque tout sous-espace ; la complexité presque sure est en $\log(n)$, alors que c'est beaucoup moins évident pour la complexité "au pire".

Question *Y a-t-il un algorithme meilleur que celui proposé au-dessus ? Autrement dit, quelle est la complexité au pire ?*

Source: `vider-la-bouteille.tex`.
Version imprimable: `vider-la-bouteille.pdf`
Angle pédagogique : *Ludique. Suites*

Objectifs et commentaires. *La résolution de la question d'optimisation de cet exercice nécessite le calcul d'une limite, qui se trouve être un exemple standard. La dernière question, qui demande un peu d'astuce, est une application de la formule : pour tout $x > 0$, $e^x > 1 + x$.*

Ah ! Ces fabricants d'emballages ! Je viens de terminer une bouteille d'un litre d'anis concentré, dont je voudrais me servir comme récipent pour de l'eau. Son élégant dessin possède un défaut majeur : quand on la renverse pour en vider le contenu, elle garde systématiquement 1 centilitre de liquide, même en la secouant dans tous les sens. Et je ne dispose pas de paille, ni d'autre moyen, pour la vider plus. Je la remplis donc d'eau. La bouteille contient alors de l'anis à $1/100^{\mathrm{e}}$, ce qui a encore trop de goût. Ce n'est pas grave, j'en jette le contenu et la remplis à nouveau. Au bout de 4 remplissages, l'anis est dilué à un pour un cent millions. On ne sent alors plus son goût, mais j'ai gâché 2,96 litres d'eau.

Question 1. (Annexe)

Pourquoi est-ce que j'affirme avoir gâché 2,96 litres et non pas 4 ?

Question 2.

J'aurais pu être plus économe, voyez-vous comment ?

Question 3.

Essayez d'optimiser votre méthode.

Question 4. Plus difficile

Prouver que l'on ne peut pas faire mieux.

I.5. Calcul du cosinus et du sinus de $\pi/8$

Source: `cos-pi-sur-8.tex`.
Version imprimable: `cos-pi-sur-8.pdf`
Angle pédagogique : *Autres. Nombres complexes*

Objectifs et commentaires. *Savoir utiliser les deux écritures des nombres complexes, faire preuve d'une certaine autonomie.*

En utilisant les racines carrées de $1 + i$, trouver une méthode pour obtenir une formule donnant $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

I.6. Cardinal d'une reunion d'ensembles

Source: `champignons.tex`.

Version imprimable: `champignons.pdf`

Angle pédagogique : *Langage. Théorie des ensembles, et structures de base*

Objectifs et commentaires. *On peut inciter les élèves a chercher une formule donnant le cardinal de l'union de 2 ensembles (probablement juste avec des patates), puis d'essayer de généraliser (peut-être en devinant la formule avec des patates, puis/ou bien en développant a l'aide de la formule pour l'union de 2).*

---

a. On s'intéresse au nombres de véhicules à quatre roues situés sur un parking. On a recueilli les informations suivantes :

> il y a 100 véhicules de la marque 'Renault', 85 véhicules de couleur claire, et 36 véhicules de marque Renault et de couleur foncée.

Peut-on déterminer le nombre de véhicules sur le parking ?

Quelle information supplémentaire permettrait de connaitre le nombre exact de véhicules ?

b. Lors d'une cueillette , on a ramassé 42 champignons à chapeau convexe, 26 à lamelles, 15 à chair rose.

– Parmi les champignons à chapeau convexe, 17 avaient des lamelles et 8 une chair rose.
– Parmi les champignons à lamelles 6 (dont 2 avec un chapeau convexe) avaient une chair rose.
– Combien a-t-on ramassé de champigons ? (on suppose implicitement une information supplémentaire.)
– Combien de champignons à chapeau convexe n'avaient ni la chair rose ni des lamelles ?

I.7. Cercles osculateurs à un graphe

Sources et figures: `cercle_osculateur/`.

Version imprimable: `cercle_osculateur.pdf`

Angle pédagogique : *Découverte. Fonctions d'une variable réelle*

Objectifs et commentaires. *Le but de l'exercice est de faire découvrir la notion de cercle osculateur, et de voir ainsi une application des développements limités. On se limite ici aux graphes de fonctions ; et on fait voir le cercle osculateur de la manière suivante : quand on fait varier le rayon d'un cercle tangent à la courbe en un point donné, il y a un moment où le cercle passe d'un côté à l'autre de la courbe. Remarquons qu'en général (si on n'est pas en un point critique de la courbure le long de la courbe), la courbe traverse son cercle osculateur ; mais ce n'est pas le cas dans la première situation abordée.*

Cet exercice est aussi l'occasion d'insister sur le fait que les développements limités ne fournissent que des informations locales *: ici, le DL permet de donner la position du cercle par rapport au graphe au voisinage du point de tangence, mais ce voisinage devient arbitrairement petit quand le rayon se rapproche du rayon osculateur (par valeurs supérieures) ; c'est l'objet de la question 2.*

Remarquons que dans la première question, on peut se passer de DL, puisqu'on peut calculer explicitement les points d'intersections du graphe avec le cercle en résolvant les équations. Pour la fonction cosinus hyperbolique, par contre, ça n'est plus possible ; de plus, on a choisi la fonction pour que les calculs se passent bien (le rayon de courbure au point $(x, \mathrm{ch}(x))$ *est* $\mathrm{ch}^2(x)$*).*

Les calculs sont simples dans la question 1 (le rayon est $1/2$*) ; c'est beaucoup plus embêtant dans la question 3, surtout pour le DL à l'ordre 3 qu'il faut effectuer si on veut répondre à la question pour le cercle osculateur (et voir que la courbe le traverse effectivement). On pourrait s'aider d'un logiciel de calcul formel. D'autre part, un des intérêts de ces questions est qu'elles obligent l'élève à faire un DL ailleurs qu'en* 0.

Ne montrer les figures 1 et 2 aux étudiants qu'après l'exercice...

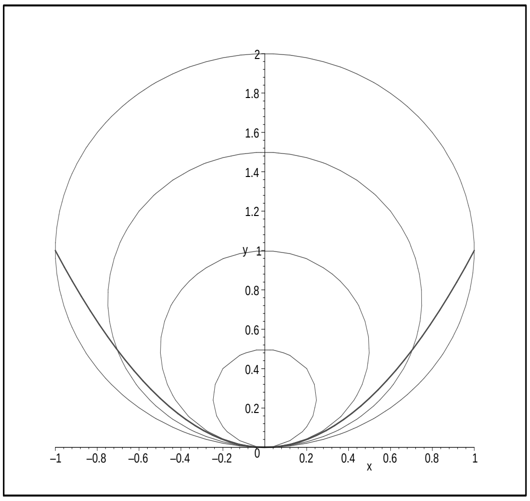


FIG. 1: Quelques cercles tangents à la courbe (1).

Question 1.

Soit f la fonction $x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ tangent au graphe de f au point (0,0).

Au voisinage de ce point, le cercle est-il situé au-dessous ou au-dessus du graphe de f ?

Question 2.

Sur quel intervalle la réponse à la question précédente est-elle valide ?

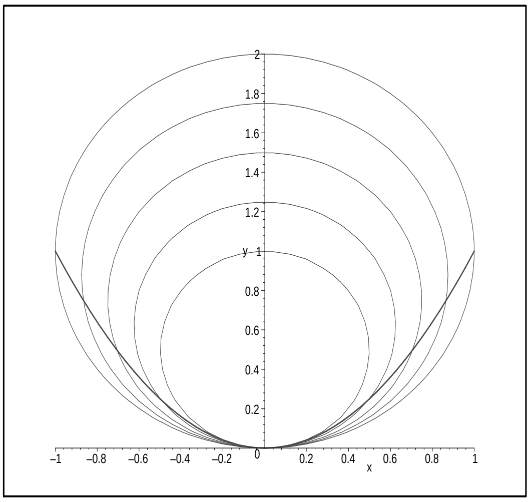


FIG. 2: Quelques cercles tangents à la courbe (2).

Question 3.

Mêmes questions en un autre point du graphe, par exemple au point $(1, 1)$.
Mêmes questions en n'importe quel point du graphe de la fonction *cosinus hyperbolique*.

Pour aller plus loin. A l'aide de Maple, faire une animation montrant la famille des cercles tangents en un point donné.

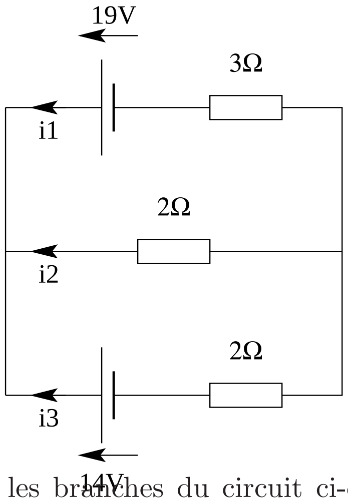
I.8. Circuit Électrique

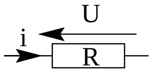
Sources et figures: `electricite/`.

Version imprimable: `electricite.pdf`

Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Rappeler l'importance des systèmes linéaires hors de mathématiques.*



Calculer les courants dans les branches du circuit ci-dessus. On rappelle les lois de Kirchhoff : la somme (algébrique) des courants entrant en un noeud est nulle, et la somme des tensions (algébriques) le long d'une boucle du circuit est nulle. On a aussi la loi d'Ohm : $U = Ri$ aux bornes d'une résistance : 

.

I.9. Comment calculer $\sqrt{2}$ quand on a oublié sa calculatrice ? (introduction à la méthode de Newton)

Sources et figures: `Methode-de-Newton/`.

Version imprimable: `Methode-de-Newton.pdf`

Angle pédagogique : *Découverte. Suites*

Objectifs et commentaires. *La méthode de Newton est un sujet très riche pour le DEUG : on peut expérimenter graphiquement, numériquement, travailler sur la formule, essayer de prouver la convergence, étudier la rapidité de la convergence (théoriquement ou expérimentalement), généraliser en dimension supérieure, voir ce qui se passe quand ça ne converge pas (et entrevoir la recherche en dynamique complexe)... C'est aussi une méthode d'une grande importance pratique, puisque c'est sans doute, grâce à sa vitesse de convergence, la plus utilisée pour approcher un zéro de fonction.*

Dans cet exercice, on demande aux étudiants de trouver la formule à partir d'une description graphique (surtout ne pas leur donner la formule alors qu'ils sont tout à fait capables de la trouver !) ; puis on l'utilise pour un calcul de $\sqrt{2}$; enfin, on compare la rapidité de convergence avec la méthode par dichotomie (en gros, dans la méthode de Newton, le nombre de décimales justes double à chaque étape, alors qu'il augmente linéairement pour la dichotomie, et qu'il faut plus de trois coups pour chaque décimale supplémentaire).

Tous les calculs demandés sont faisables à la main (division à trois ou quatre chiffres), et on constate qu'on peut avoir une très bonne approximation d'une racine carrée, sans calculatrice, en peu de temps.

La première partie a été testée à un examen où les étudiants travaillaient en groupes de quatre, et a été globalement réussie.

La méthode de Newton (ou méthode des tangentes) est une manière d'obtenir des approximations numériques d'un "zéro" d'une fonction (c'est-à-dire d'un nombre où la fonction s'annule). Dans cet exercice, on décrit cette méthode, puis on l'applique au calcul des premières décimales de $\sqrt{2}$. La deuxième partie de l'exercice propose de comparer cette méthode avec la méthode par dichotomie. [4]

I. La méthode de Newton

Question 1. Formule

À partir de l'encadré décrivant graphiquement la méthode de Newton, trouver la formule donnant x_1 en fonction de x_0.

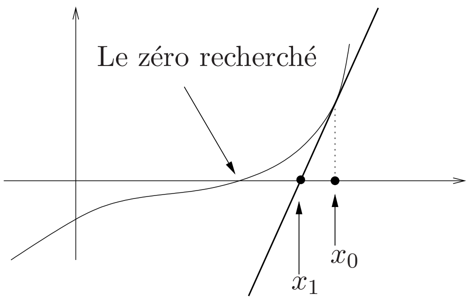
Quelles hypothèses doit-on faire sur f et x_0 pour que la formule ait un sens ?

La méthode de Newton

Toutes les méthodes de recherche numérique de zéro de fonctions suivent le même principe général : à partir d'une "première bonne approximation" du zéro recherché, trouver une approximation qui soit encore meilleure, puis recommencer...

Voici comment procède la méthode de Newton. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On part d'un nombre "quelconque" x_0 ;
2. à partir de x_0, on calcule un nouveau nombre x_1 de la manière suivante (voir figure) : on trace la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0, et on détermine le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses. On appelle x_1 l'abscisse de ce point d'intersection ;
3. et on recommence : on calcule un nouveau nombre x_2 en appliquant le procédé décrit au point 2 où l'on remplace x_0 par x_1 ;
4. *et caetera...*



Question 2. Calcul explicite

On veut utiliser la méthode de Newton pour calculer, à la main, une approximation décimale du nombre $\sqrt{2}$. Pour ça, on prend la fonction $f(x) = x^2 - 2$ (remarquez que $\sqrt{2}$ est bien un zéro de f !), et on part de $x_0 = 1$.

a. Tracer la fonction f, représenter graphiquement les nombres x_0, x_1, x_2 et x_3. Calculer, à la main, les nombres x_1, x_2 et x_3 sous forme de fraction.

[4] Étant donné le titre de l'exercice, les calculs seront faits sans utiliser de calculatrice...

b. Sachant que le début du développement décimal de $\sqrt{2}$ est :

$$1.414213562$$

dire, pour x_3, combien on a trouvé de “bonnes” décimales.

c. Autres choix d'approximation initiale On considère toujours la fonction $f(x) = x^2 - 2$. Que se passe-t-il si on part d'une autre valeur que 1 pour x_0 ? Décrire, en fonction du choix de x_0 dans $\mathbb{R}$, le comportement de la méthode de Newton (ne pas oublier les cas particuliers !). Pour le zéro $\sqrt{2}$ de cette fonction f, comment préciserait-on la notion de “première bonne approximation” dont parle l'encadré ?

Question 3. Preuve

Dans le cas précédent ($f = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$), prouver que la suite (x_n) définie par la méthode de Newton converge vers $\sqrt{2}$.

II. Partie optionnelle : comparaison avec la dichotomie

La méthode par dichotomie

Voici une description de la méthode par dichotomie.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont on connait le sens de variation autour de α : par exemple, f est négative avant α et positive après.

1. On commence par choisir un nombre x_0 que l'on sait être plus petit que le zéro α recherché ;
2. on choisit aussi un nombre x_1 plus grand que α ;
3. on prend pour x_2 le milieu de l'intervalle $[x_0, x_1]$: x_2 découpe cet intervalle en deux intervalles deux fois plus petits, l'intervalle de gauche $[x_0 x_2]$ et l'intervalle de droite $[x_2 x_1]$;
4. le nombre x_3 est alors déterminé de la manière suivante : si α est dans l'intervalle de gauche (autrement dit si $f(x_2) > 0$), alors on choisit pour x_3 le milieu de cet intervalle ; sinon, on choisit le milieu de l'intervalle de droite.
5. et on recommence : le nombre x_3 découpe le nouvel intervalle en deux intervalles deux fois plus petits, et on choisit pour x_4 le milieu d'un de ces deux intervalles, selon la position de α.
6. *et caetera...*

Question 1. Nouveau calcul explicite

On cherche à nouveau une approximation de $\sqrt{2}$. Pour ça, on va appliquer la méthode par dichotomie (voir encadré) avec $x_0 = 1$ et $x_1 = 2$.

a. Montrer rapidement (mais rigoureusement) que $\sqrt{2} \in [x_0, x_1]$.

b. Calculer les nombres x_2, x_3, x_4, x_5 sous forme de fraction. Représenter-les sur un dessin.

c. Dire, pour x_5, combien on a trouvé de “bonnes” décimales.

Question 2. Preuve

Dans le cas particulier précédent ($f = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$), prouver que la suite (x_n) définie par la méthode de dichotomie converge vers $\sqrt{2}$.

Question 3. Bilan

Comparer les deux méthodes sur cet exemple.

I.10. Concours de recrutement

Source: `recrutement.tex`.
Version imprimable: `recrutement.pdf`
Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Montrer que même dans des situations concrètes, la solution à un problème donné n'est pas toujours unique. Ici la non-unicité est previsible, et facile à interprêter.*

Vous projetez de passer un coucours de recrutement l'an prochain. Vous avez sous les yeux le tableau de notes suivant :

Candidat	A	B	C
Mathématiques	7	11	11
Anglais	12	6	16
Informatique	6	10	14
Moyenne	8	9	14

Retrouvez les coefficients de chaque épreuve. La solution est-elle unique ? Pourquoi ?

I.11. Contraire informel et négation mathématique

Source: `contraire.tex`.
Version imprimable: `contraire.pdf`
Angle pédagogique : *Méta-mathématiques. Technique*

Objectifs et commentaires. *De manière surprenante, la négation mathématique est difficile à acquérir pour les étudiants. D'après le Larousse, contraire signifie* ce qui est inverse, tout à fait opposé. *Ainsi, le* contraire *(en français) de “il fait beau tous les jours”, est sans doute “il fait mauvais tous les jours” bien plus que “il fait mauvais certains jours”. La négation mathématique n'est donc pas immédiatement assimilable au* contraire *en français (notion qui n'est sans doute pas bien définie). Le but de l'exercice est de mettre le doigt sur cette difficulté pour arriver à la dépasser en utilisant des situations concrètes.*

On peut aussi s'appuyer sur cet exercice pour introduire la procédure mécanique de négation d'un énoncé formalisé. La difficulté se ramène alors à la formalisation *de l'énoncé initial avec l'inconvénient qu'en perdant le sens, on perd un moyen de contrôler ce qu'on écrit.*

Le but de l'exercice est de bien comprendre la négation mathématique d'une phrase, d'un énoncé, et la différence qu'il peut y avoir avec son *contraire*, en français. D'après le Larousse, *contraire* signifie *ce qui est inverse, tout à fait opposé. Froid est le contraire de chaud.*

Considérons la phrase "*dans ce pays, il fait beau tous les jours*". En français, on peut avoir tendance à dire que son contraire[5] est "*dans ce pays, il fait mauvais tous les jours*". Pourtant, ce n'est pas sa négation mathématique. En effet, dans un pays où il fait beau un jours sur deux, les deux phrases sont fausses or une phrase et sa négation doivent toujours avoir des valeurs de vérité différentes (s'il l'une est vraie, l'autre est fausse).

a. Quelle est la négation de la phrase de l'énoncé ?

b. Quelle sont les négation des phrases suivantes :

(i). — "*tous les lundis, je joue au squash*" ?

(ii). — "*tous les lundis, je joue au squash et je me douche*" ?

(iii). — "*tous les lundis où il fait beau, je joue au tennis*"

(iv). — "*tous les lundis, s'il fait beau, je joue au tennis*"

(v). — "*tous les lundis, je joue au squash ou au tennis*"

(vi). — "*je joue au squash au moins une fois par semaine*"

(vii). — "*chaque semaine, si je n'ai pas joué au squash, je joue au tennis au moins deux fois*"

(viii). — "*tous les ans, il y a des semaines où je ne peux pas jouer au squash*"

(ix). — "*certaines années, je joue au squash tous les lundi (sans exception)*"

I.12. Description d'ensembles de nombres complexes

Sources et figures: `dessins-complexes/`.

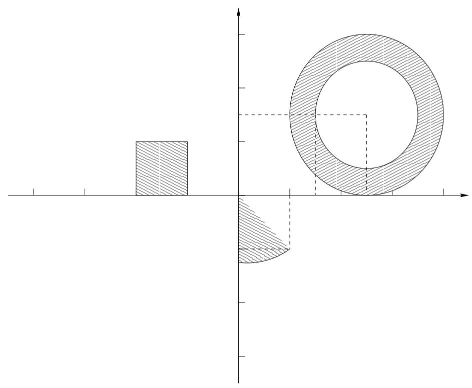
Version imprimable: `dessins-complexes.pdf`

Angle pédagogique : *Visualisation. Nombres complexes*

[5]En mathématiques, on utilise souvent le mot contraire comme synonyme de négation. Dans cet exercice, on fait la distinction entre la *négation* au sens mathématique, et le *contraire* (au sens du francais) qui n'a pas vraiment de définition univoque.

Objectifs et commentaires. *Représentation du plan complexe ; savoir choisir la forme adaptée à un problème (coordonnées polaires ou cartésiennes). Savoir passer des formules au dessin* et reciproquement.

Caractériser les nombres complexes z appartenant aux ensembles suivants :



I.13. Dessiner le crocodile : visualisation de la multiplication complexe

Sources et figures: `crocodile/`.

Version imprimable: `crocodile.pdf`

Angle pédagogique : *Visualisation. Nombres complexes*

Objectifs et commentaires. *L'image d'un crocodile par l'application $z \mapsto z^2$ est un crocodile qui se mord la queue, manière visuelle percevoir la non-injectivité. Cet exercice est inspiré du début du film d'Adrien Douady sur la dynamique du lapin, où Adrien explique sans formule, graphiquement, la fonction $z \mapsto z^2 + c$.*

On peut faire placer des points de l'image du croco au fur et à mesure des questions 1 et 2.

On voudrait comprendre "quel effet cela fait à un nombre complexe de se faire élever au carré". Pour ça, on cherche à dessiner l'image du crocodile par l'application φ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2. \end{array}$$

a. Ecrire les parties réelles et imaginaires de z^2 en fonction de celles de z, puis le module et l'argument de z^2 en fonction de ceux de z. Commentaire ?

b. Dessiner une demi-droite issue de 0 et son image par φ.

c. Quelle est l'image d'un cercle centré en 0 ? Placer aussi les images de quelques points particuliers du cercle.

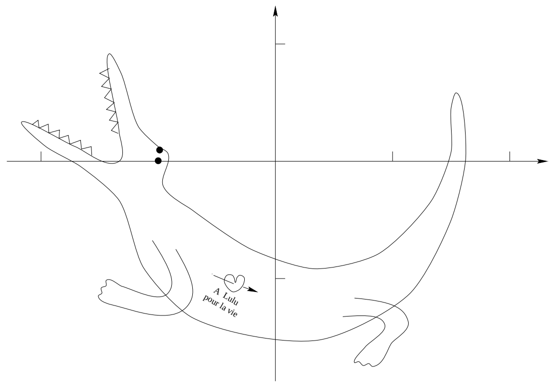


FIG. 3:

d. “Dessiner l’image du crocodile”.

e. “Comment voit-on que l’application n’est pas injective ?”

f. Dessiner l’image réciproque du crocodile (attention, il y a un piège...).

g. (plus facile) Dessiner de même l’image du croco par $z \mapsto z + 1 + 2i$, $z \mapsto (\sqrt{3} + i)z$.

I.14. Emboîter c’est ordonner

Sources et figures: `emboiter_est_ordonner/`.
Version imprimable: `emboiter_est_ordonner.pdf`
Angle pédagogique : *Ludique. Théorie des ensembles, et structures de base*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *L’objectif est de faire réfléchir les étudiants sur ce qu’est un ordre partiel.*

---

a. On considère un ensemble de boîtes (avec des couvercles). On dit qu’une boîte x *rentre* dans une boîte y s’il est possible de mettre la boîte x à l’intérieur de la boîte y et de fermer le couvercle de y. La relation *rentrer dans* est-elle une relation d’ordre ? total ?

b. Supposons que toutes les boîtes soient des parallélépipèdes dont les faces sont parallèles. Chacune est ainsi caractérisée par 3 dimensions : sa largeur l, sa profondeur p et sa hauteur h. Comment se traduit numériquement le fait qu’une boîte rentre dans une autre si on s’interdit de tourner les boîtes (de sorte que la largeur de l’une reste parallèle a la largeur de l’autre etc.).

I.15. Équations polynomiales

Source: `equations-polynomiales.tex`.
Version imprimable: `equations-polynomiales.pdf`
Angle pédagogique : *Technique. Polynômes*

Objectifs et commentaires. *Savoir quels types d'équations on peut résoudre avec les techniques du cours (et les résoudre !) Évidemment, cette formulation inhabituelle pose des problèmes pédagogiques : les étudiants se satisfont difficilement de la réponse "Je ne sais pas faire" quand elle vient du prof ! (Manque d'habitude ?...) On peut bien sur évoquer la théorie de Galois, dire que même si on n'a pas de formules, on a des algorithmes pour trouver des solutions approchées ; mais l'essentiel est de ne pas apprendre une technique sans être conscient de ses limites ! D'ailleurs, je ne sais absolument pas si les équations atypiques données ici sont résolubles par radicaux ou non...*

Résoudre, si c'est possible, les équations polynomiales suivantes :

$(a)\quad z^3 = i$	$(b)\quad z^5 = 1 + i\sqrt{3}$
$(c)\quad z^2 + 2iz + 1 = 0$	$(d)\quad z^{10} - 2i\sqrt{3}z^5 - 4 = 0$
$(e)\quad 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$	$(f)\quad 1 + z + 2z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$
$(g)\quad z^{11} - 2i\sqrt{3}z^5 - 4 = 0$	$(h)\quad (z+1)^n - (z-1)^n = 0.$

Inventer des équations que l'on peut résoudre avec les techniques du cours, puis des équations que vous ne savez pas résoudre.

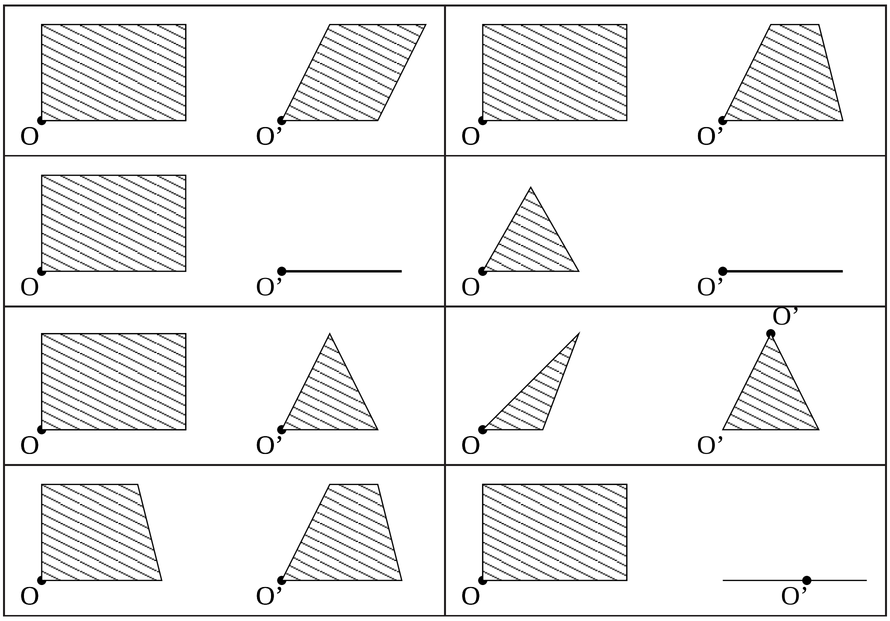
I.16. Est-ce linéaire ?

Frédéric Pham, Hervé Dillinger.
Sources et figures: `est-ce-lineaire/`.
Version imprimable: `est-ce-lineaire.pdf`
Angle pédagogique : *Visualisation. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Faire découvrir la nature géométrique d'une application linéaire, et en particulier, ce qu'une application linéaire conserve et ne conserve pas : alignement, angles, longueurs, orientation...*
Cet exercice est tiré de l'excellent ouvrage Algèbre Linéaire de F. Pham et H. Dillinger (Bibliothèque des sciences, Diderot Éditeur).

---

a. Décider dans quels cas la figure de droite peut être l'image par une application linéaire de la figure de gauche :



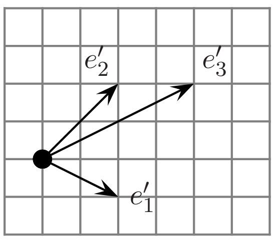
b. Même question en échangeant droite et gauche.

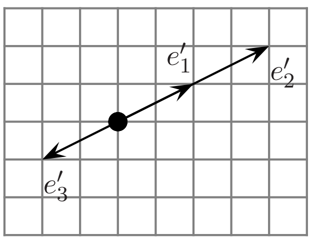
I.17. Exercice géométrique sur le noyau.

Frédéric Pham, Hervé Dillinger. (Cet exercice n’est pas sous copyleft LDL)
Source: `noyau-geometrique.tex`.
Version imprimable: `noyau-geometrique.pdf`
Angle pédagogique : *Visualisation. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Trouver des relations de dépendance linéaire entre des vecteurs donnés géométriquement. Voir que l’image d’une base détermine le noyau. Cet exercice est tiré de l’excellent ouvrage Algèbre Linéaire de F. Pham et H. Dillinger (Bibliothèque des sciences, Diderot Éditeur).*

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Les figures (i) et (ii) représentent les vecteurs (e'_1, e'_2, e'_3) images par f d’une base (e_1, e_2, e_3) de E. Dans chacun des deux cas, déterminer l’ensemble de tous les vecteurs de E dont l’image par f est nulle.





I.18. Faire des manteaux avec des matrices.

Source: `manteaux.tex`.

Version imprimable: `manteaux.pdf`

Angle pédagogique : *Langage. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Les tableaux de nombres qui ont donné naissance aux matrices apparaissent naturellement dans ce contexte de produits formés à partir des mêmes ingrédients. Le but de l'exercice est de mettre les matrices dans ce contexte où la composition des matrices est complètement naturelle (on a deux tableaux, et on cherche un autre tableau). L'exercice lui-même est élémentaire.*

Une entreprise fabrique des manteaux[6]. Ces manteaux sont composés de tissu rouge, de tissu bleu, et d'une doublure noire. Le tableau suivant résume la quantité de chaque tissu nécessaire à la confection du manteau en tailles S, M et L.

Taille	S	M	L	XL
Tissu rouge	0,4m^2	0,5m^2	0,6m^2	0,7m^2
Tissu bleu	1m^2	1,1m^2	1,2m^2	1,3m^2
Doublure	1,5m^2	1,7m^2	1,9m^2	2,1m^2

Chaque tissu est tissé à l'aide plusieurs types de fil : coton, polyester, et polyamide. Le tableau suivant résume les longueurs de fil de chaque type nécessaire par mètre carré de tissu.

Tissu	rouge	bleu	doublure
Coton	500m	400m	1000m
Polyamide	1000m	900m	700m
Polyester	500m	600m	0

Questions :

a. L'entreprise veut produire a manteaux taille S, b manteaux taille M, c manteaux taille L et d manteaux taille XL. Quelle quantité de fil de chaque catégorie doit-elle commander ? Répondre à cette question dans le langage des matrices.

b. En fin d'année, l'entreprise veut écouler entièrement ses stocks de fils. Il lui reste 100.000m de coton et de polyamide, et 20.000m de Polyester. Peut-elle transformer entièrement ses stocks de fils en manteaux ?

I.19. Forme de Lorentz, loi relativiste de composition des vitesses, et paradoxe des jumeaux de Langevin

Source: `paradoxe_des_jumeaux.tex`.

Version imprimable: `paradoxe_des_jumeaux.pdf`

Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

[6]Si un jour vous deviez réaliser un manteau, il serait raisonnable de ne pas vous baser aveuglément sur les données de l'exercice !

Objectifs et commentaires. *Cet exercice permet de retrouver beaucoup de choses de la relativité restreinte à partir seulement de la forme de Lorentz. Cela permet de montrer un autre aspect des formes quadratiques, parallèle à la géométrie euclidienne. On y utilise un algorithme de Schmidt adapté aux formes non positives. Le paradoxe des jumeaux de Langevin est une sorte d'inégalité triangulaire à l'envers qui utilise des raisonnement similaires à ceux établissant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le théorème d'inertie de Sylvester.*

I. Les lignes de vie dans l'espace-temps.

Pour donner rendez-vous à quelqu'un vous devez préciser le lieu et l'heure. L'espace-temps est un modèle de l'ensemble des points de rendez-vous possibles.

Définition. *L'espace-temps E est un espace vectoriel de dimension* 4.

On peut parfois utiliser des coordonnées pour décrire un point de l'espace-temps (c'est plus adapté dans certaines villes que d'autres) : *rendez-vous à 20h30 au croisement de la 10^e rue, 16^e avenue, 37^e étage*. Pour parler de coordonnées, il faut un référentiel.

Définition. *Un* référentiel *de l'espace-temps E est une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E.*[7]

Par commodité, on considère souvent un bébé modèle (on dit aussi *toy model* en anglais) où l'espace-temps E est de dimension 2 (une dimension d'espace et une dimension de temps).

Les questions qui suivent ne sont pas mathématiques à proprement parler mais sont plutôt des questions de modélisation dont le but est d'aboutir à des définitions mathématiques. Elles sont aussi un moyen de se familiariser avec cette notion d'espace-temps.

On suppose que l'espace-temps E est muni d'un référentiel $\mathcal{R}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ tel que les 3 premières coordonnées x, y, z dans $\mathcal{R}_0$ représentent les coordonnées d'espace habituelles (dans une base orthonormée fixe par rapport à la terre), et la quatrième coordonnée représente la date, c'est à dire le temps écoulé depuis l'origine des temps qu'on a choisie. On dit que $\mathcal{R}_0$ un référentiel fixe par rapport à la terre.

Question 1.

Un train parcours en ligne droite et à vitesse constante le trajet Paris-Marseille (on dit que le train est en mouvement rectiligne uniforme). Dans un référentiel fixe par rapport à la terre, faire un dessin de l'ensemble des points de l'espace-temps occupés par le train, autrement dit, la trajectoire du train dans l'espace-temps (on pourra se placer dans le bébé modèle). On appelle cet ensemble la *ligne de vie* du train.

Dessiner sur le même graphique la ligne de vie de la gare de Marseille, la ligne de vie de la gare de Paris, la ligne de vie d'un train partant au même moment mais allant un peu plus vite, et la ligne de vie d'un train partant en sens contraire. Déterminer géométriquement l'endroit et la date à laquelle deux de ces trains se rencontrent.

---

[7] On peut imaginer d'autres types de référentiels : accélérés ou en rotation mais ils ne rentrent pas dans le cadre de la relativité restreinte. Par contre, il ne faut pas penser que ces référentiels sont *fixes* les uns par rapport aux autres. Voir question 4

Question 2.

On modélise un mobile par sa ligne de vie (c'est à dire qu'on veut interpréter toutes les propriétés du mobile en termes de sa ligne de vie). Donner une définition en terme de ligne de vie du fait qu'un mobile est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

Cette notion dépend-t-elle du référentiel choisi ? [8]

Question 3.

Proposer une définition en terme de ligne de vie qui signifie qu'un mobile est en mouvement rectiligne uniforme dans un référentiel donné.

Cette notion dépend-t-elle du référentiel choisi ?

Question 4.

On dit qu'un référentiel $\mathcal{R}$ est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel $\mathcal{R}'$ si tout mobile immobile dans $\mathcal{R}$ est en mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}'$. [9] Démontrer que tous les référentiels sont en mouvements rectilignes uniformes les uns par rapports aux autres.[10]

II. Forme de Lorentz

La relativité restreinte postule que l'espace-temps E est muni d'une forme quadratique L appelée *forme de Lorentz*. Dans certains référentiels privilégiés (l'équivalent des bases orthonormées), cette forme s'écrit $L(\vec{v}) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ où les coordonnées de $\vec{v}$ dans le référentiel en question sont $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, et c est la vitesse de la lumière (3×10^8m/s).

Définition. *Un référentiel* $\mathcal{R} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ *est* privilégié *si* $L(xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$.

De fait, les coordonnées ne représentent fidèlement les notions d'espace et de temps que si le référentiel est privilégié. Ces référentiels privilégiés, tous en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, sont souvent appelés des référentiels *galliléens*. Le postulat de la relativité restreinte est que c'est la forme de Lorentz qui caractérise la géométrie de l'espace-temps, en d'autres termes, que les lois de la physique s'exprimeront de la même manière dans tous les référentiels privilégiés.

Note fondamentale. Tout cela signifie en particulier que si A et B sont deux points de l'espace temps E, $L(\overrightarrow{AB})$ a une valeur indépendante de tout référentiel. Si on change de référentiel, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ changeront, l'écriture de L en fonction des coordonnées aussi, mais $L(\overrightarrow{AB})$ ne changera pas.[11]

[8] Il apparaît déjà ici que tous les référentiels ne donneront pas une notion correcte d'espace et de temps (et d'immobilité). Voir la deuxième partie.

[9] ne pas perdre de vue que par définition, un référentiel est une base de l'espace-temps E

[10] Cela signifie en particulier que la relativité restreinte ne traite pas les référentiels accélérés. Voir la relativité générale pour cela

[11] De manière analogue, la longueur d'une tige AB ne dépend pas de la base de l'espace choisie, même si les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'expression du produit scalaire en fonction des coordonnées dépendent de la base...

Définition. *Soit $\mathcal{R}$ un référentiel privilégié, et soient A et B deux points de l'espace-temps E de coordonnées* $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ t_A \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ t_B \end{pmatrix}$ *dans $\mathcal{R}$. On définit la* distance *entre A et B dans $\mathcal{R}$ par*

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

*L'*intervalle de temps *séparant A et B dans $\mathcal{R}$ est par définition $t_B - t_A$.*

Postulat. *La relativité restreinte postule que le temps et la distance mesurés (et ressentis) par un observateur immobile dans le référentiel $\mathcal{R}$ entre deux évènements A et B sont justement la distance et l'intervalle de temps dans $\mathcal{R}$ comme définis au dessus.*

Dans le cadre du bébé modèle, on note en général x et t les coordonnées dans un référentiel privilégié (e_1, e_2), et dans un tel référentiel, L s'exprime sous la forme $L(\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}) = x^2 - c^2t^2$. La distance entre A et B est alors donnée par $d(A,B) = \sqrt{x_B^2 - x_A^2} = |x_B - x_A|$, et l'intervalle de temps les séparant est toujours $t_B - t_A$.

Question 1.

On pourra traiter cette question dans le cadre du bébé modèle.

Définition. *On dit qu'un vecteur u est de type temps si $L(u) < 0$, de type espace si $L(u) > 0$. Si $L(u) = 0$ on dit que u est de type lumière. L'ensemble des vecteurs de type lumière s'appelle le* cône de lumière.

Dessiner les zones de E qui correspondent à des vecteurs de type espace, de type temps et de type lumière. Le type d'un vecteur dépend-il du référentiel ?

Les vecteurs directeurs des lignes de vies des trains considérés plus tôt sont de quel type ?

Si (e_1, e_2, e_3, e_4) est un référentiel privilégié, quels sont les types des quatres vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 ?

Question 2.

Reprendre le dessin des lignes de vie des trains. On suppose que le référentiel fixe par rapport à la terre est privilégié. Comment lit-on la vitesse v du train sur le dessin ? Donner une définition de la vitesse dans $\mathcal{R}_0$ d'un mobile en mouvement rectiligne uniforme en terme de sa ligne de vie.

La vitesse dépend-elle du référentiel dans laquelle on la calcule ?

Question 3.

On se replace dans l'espace-temps de dimension 4. Supposons qu'un mobile en mouvement rectiligne uniforme aille à la vitesse de la lumière dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ (en d'autres termes, $v = c$) Comment cela se traduit-il en termes de sa ligne de vie ?

Cette notion (le fait d'aller à la vitesse de la lumière) dépend-elle du référentiel considéré ?

Question 4.

Soit l la forme polaire de L. Soit $\mathcal{R} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ un référentiel privilégié, et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace temps. Exprimer les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{R}$ en fonction de $l(u, e_i)$.

Question 5.

Dans la suite, on se place à nouveau dans le bébé modèle. Chercher quel est le référentiel privilégié $\mathcal{R} = (u_1, u_2)$ que considèrerait un observateur dans un train Paris-Marseille se déplacant à vitesse v par rapport à la terre. En d'autres termes, trouver un référentiel privilégié $\mathcal{R}$ dans lequel le train est immobile (voir question I.2).([12])

Question 6.

Soit P et P' les deux points de E de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}_0$ représentant la position dans l'espace-temps de la gare de Paris aux temps $t = 0$ et $t = T$. Calculer la distance et l'intervalle de temps séparant P et P' dans $\mathcal{R}_0$.

Calculer les coordonnées de P et P' dans $\mathcal{R}$ et en déduire la distance et l'intervalle de temps séparant P et P' dans $\mathcal{R}$.

La distance entre deux points est elle indépendante du référentiel ?

Question 7.

Quel est l'ensemble des points de E simultanés à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ relativement à $\mathcal{R}$? Dessiner cet ensemble sur le dessin. Le fait que deux événements soient simultanés dépend-il du référentiel ? (Si oui préciser pourquoi. Si non, donner un exemple).

Question 8. Loi de composition des vitesses.

On considère deux trains T et T' allant à des vitesses v et v' par rapport à la terre. Soient (u_1, u_2) et (u'_1, u'_2) les référentiels privilégiés fixes par rapport à ces deux trains.

Trouver les coordonnées d'un vecteur directeur de la ligne de vie du train T' dans la base (u_1, u_2).

En déduire la vitesse du train T' dans le référentiel lié à T. Cette formule pour la vitesse relative de deux mobiles s'appelle la loi de composition des vitesses.

Vérifier que lorsque v et v' sont petites devant c, la vitesse obtenue est proche de $v - v'$.

III. Le paradoxe des jumeaux de Langevin.

On peut formuler le paradoxe de la façon suivante. Deux jumeaux (du même âge !) sont à Paris. L'un des deux jumeaux, disons Albert, décide de faire un aller-retour Paris-Marseille alors que l'autre, Isaac, reste à Paris. Lorsqu'Albert et Isaac se retrouvent à Paris, Albert est devenu plus jeune qu'Isaac.

On veut démontrer ce résultat dans l'espace-temps de dimension 4, pas dans le bébé-modèle.

[12]Réponse : on trouve $u_2 = \gamma \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_1 = \pm\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ v/c^2 \end{pmatrix}$ avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Question 1.

Faire un diagramme dans l'espace-temps de la situation (on suppose qu'Albert ne s'attarde pas à Marseille : dès qu'il est arrivé, il saute dans un train qui fait le voyage retour).

Question 2. Interprétation de la forme de Lorentz comme *temps propre*.

a. Supposons que deux points A et B de l'espace-temps correspondent à un même endroit sur terre, mais à des dates différentes (pour un observateur sur terre). Quel est la nature de $\overrightarrow{AB}$ (type temps/espace/lumière) ? Quel est le lien entre $L(\overrightarrow{AB})$ et l'intervalle de temps qui sépare A et B ?

b. Supposons maintenant qu'un train (en mouvement rectiligne uniforme) passe par deux points A et B de l'espace-temps. Du point de vue d'un voyageur du train, combien de temps faut-il pour aller de A à B ? (le calculer en fonction de $L(\overrightarrow{AB})$). Le voyageur étant dans le train, il s'agit là de l'intervalle de temps dans un référentiel $\mathcal{R}$ lié au train (c'est à dire dans lequel le train est immobile). On dit que ce temps est le temps propre du voyageur. C'est le temps qu'il mesure et qu'il ressent.

Pour la suite, on pourra admettre (ou pourquoi pas démontrer !) que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui pointent tous les deux vers le futur dans un référentiel donnés, alors on a $l(u, v) < 0$ (où l est la forme polaire de L).[13]

Question 3.

Montrer que le paradoxe des jumeaux est équivalent à une sorte d'inégalité triangulaire à l'envers. [14].

Question 4. Preuve du paradoxe, 1ère étape.

Démontrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ satisfont $L(\vec{u}) < 0$ et $L(\vec{v}) < 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $L(\vec{u} + t\vec{v}) \geq 0$. Quelle est l'hypothèse cruciale sur L ? *Indication : considérer le plan engendré par u et v, et faire un raisonnement similaire à celui de la preuve du Théorème d'inertie de Sylvester.*

Question 5. Preuve du paradoxe, 2ème étape.

Considérer un trinôme du second degré comme dans la preuve de l'inégalité de Cauchy Schwartz pour démontrer que $\sqrt{-L(u+v)} \geq \sqrt{-L(u)} + \sqrt{-L(v)}$ (quelles sont les hypothèses sur u et v ?) [15].

Question 6. Quelques ordres de grandeur.

Quelle erreur relative commet-on en utilisant la loi newtonnienne de composition des vitesses ($v'' = v - v'$) lorsque v et v' sont de l'ordre de la vitesse du son ($v = 3.10^2\mathrm{m/s} =$

[13] pointer vers le futur dans un référentiel privilégié signifie que la 4ème coordonnée est positive.

[14] $\sqrt{-L(\overrightarrow{AC})} \geq \sqrt{-L(\overrightarrow{AB})} + \sqrt{-L(\overrightarrow{BC})}$

[15] On utilise le fait que $u, v, u+v$ sont des vecteurs de type temps et que $l(u, v) < 0$

$10^{-6}c$) ?[16]

Que vaut la différence d'âge entre Albert et Isaac si Albert voyage à la vitesse du son pendant un an (deux fois 6 mois). La précision d'une horloge atomique est de l'ordre de 10^{-14} (secondes par secondes). Est-ce que cet écart est détectable avec une telle horloge atomique ?[17]

Considérons un évènement se produisant à un instant $t = 0$ sur l'étoile la plus proche du soleil (alpha du centaure à 4 années-lumière dans le référentiel de la terre). Un observateur fixe par rapport à la terre et un observateur allant à la vitesse $v = 100km/h \simeq \times 10^{-7}c$ attribueront des dates différentes à cet évènement. De combien ces dates diffèrent-elles ? Même question pour la galaxie la plus proche (le nuage de Magellan) qui se trouve 40,000 fois plus loin ? [18]

Retour sur quelques résultats importants.

Ce problème a permis de mettre en évidence plusieurs choses.

- De même que la première coordonnée d'une tige (d'un vecteur) dans un espace euclidien dépend de la base choisie (contrairement à sa longueur qui est bien définie), l'intervalle de temps séparant deux points A et B de l'espace-temps va dépendre du référentiel choisi : l'intervalle de temps n'est rien d'autre que la 4ème coordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Il en est de même pour la distance entre ces deux points. Par contre, alors que la première coordonnée d'une tige n'a pas grande signification physique, l'intervalle de temps séparant deux évènements a un sens physique important (même s'il dépend du référentiel choisi pour le mesurer). On dit que la distance et le temps entre deux évènements sont *relatifs*, c'est à dire qu'ils dépendent du référentiel dans lequel on se place pour les observer.
- Par contre *tout* n'est pas relatif. En particulier, le fait d'aller à la vitesse de la lumière ne dépend pas du référentiel choisi. Historiquement, cet absolu là (provenant des équations de Maxwell en electromagnétisme (1873) confirmées par les expériences de Michelson-Morley en 1881-1887) a joué un rôle important dans la construction de la relativité.
- Les résultats de la relativité sont parfois déroutants. Cependant, faut-il rappeler que la relativité n'est pas une théorie purement formelle ? Pour que le GPS (Global Positionning System) fonctionne correctement, il est nécessaire d'utiliser la relativité générale. En effet, le GPS est basé sur un réseau de satellites en orbite autour de la terre ayant chacun à bord une horloge atomique. Le récepteur GPS recoit des signaux emis par certains de ces satellites, mesure l'intervalle de temps séparant leur réception, et en déduit sa position dans l'espace temps (latitude, longitude, altitude et heure) avec une précision d'environ 15m=50ns. Mais les satellites se déplacent à une vitesse de 14,000km/h, bien supérieure à la vitesse du récepteur GPS, provoquant un ralentissement apparent de l'horloge embarquée. Par contre, les satellites se situent à 20,000km d'altitude où la pesanteur est quatre fois moindre qu'à la surface de la terre, d'où résulte (d'après la relativité générale) une accélération apparente des horloges embarquées. La combinaison de ces effets relativistes fait que les horloges embarquées se décalent chaque jour par rapport au

[16] de l'ordre de 10^{-12}

[17] On trouve $16\mu s$. L'expérience a effectivement été réalisée (sur une durée plus courte).

[18] réponse : 12 secondes environ pour alpha proxima. 40,000 fois plus pour le nuage de magellan : 6 jours.

temps terrestre de 38 microsecondes. Cette déviation est énorme (pour le GPS) : si on n'en tenait pas compte, des erreurs de navigations de l'ordre de 10km ($=c\times 38\mu s$) s'accumuleraient chaque jour.

Vous pouvez aller voir la Foire Aux Questions (en anglais) sur la relativité à l'adresse suivante : `http ://www.weburbia.demon.co.uk/physics/relativity.html`.

I.20. Graphes et lignes de niveau des fonctions de deux variables *(Nouveau)*

Sources et figures: `graphes-deux-variables/`.

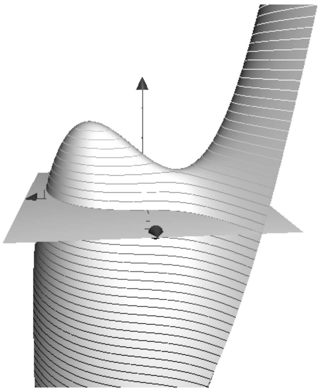
Version imprimable: `graphes-deux-variables.pdf`

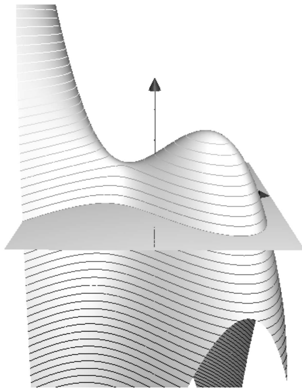
Angle pédagogique : *Découverte. Fonctions de plusieurs variables réelles*

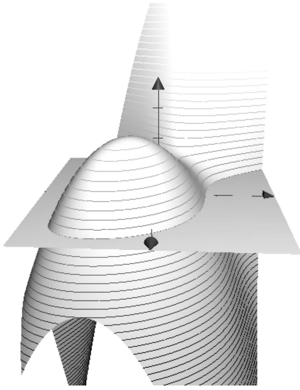
Objectifs et commentaires. *Cet exercice peut servir d'introduction aux fonctions de plusieurs variables, et notamment à leurs représentations graphiques sous forme de graphe et de lignes de niveaux (*avant *tout cours sur le sujet). Il devrait aider les étudiants à se forger une image mentale de ce qu'est une fonction de deux variables.*

I. La presqu'île

Les trois dessins ci-dessous représentent des vues en relief d'une presqu'île, avec le plan du niveau de la mer. Les vues sont orientées respectivement vers le Nord, l'Ouest, et le Sud. On a représenté les lignes de niveaux d'altitude 0m, 25m, 50m, *etc.* (le sommet est situé à une altitude d'environ 250m).







Question 1. Lignes de niveau

a. Dessiner, en vue du dessus, l'allure de la ligne de niveau 0 (ensemble des points de la presqu'île situés à l'altitude 0). On utilisera le cadre fourni.

b. Même question pour la ligne de niveau 100m, puis pour la ligne de niveau 200m (sur le même dessin).

Question 2. Profils du relief

a. Dessiner le profil du relief le long d'un itinéraire Sud-Nord passant par le sommet de la presqu'île.

b. Même question pour un itinéraire passant au dessus de l'axe Nord-Sud représenté sur les dessins. Même question pour un itinéraire passant par le col de la presqu'île.

c. (optionnelle) Sur un autre dessin, représenter le profil du relief le long d'un itinéraire Ouest-Est passant au dessus de l'axe Ouest-Est représenté.

En fait, la surface dessinée ci-dessus est le graphe de la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}.$$

Ceci signifie :

- qu'on a muni l'espace d'un repère orthonormé $(Oxyz)$,
- et qu'on a représenté *l'ensemble des points* (x, y, z) *de l'espace tels que* $z = f(x,y)$.

L'axe (Oz) est dirigé vers le haut, l'axe (Ox) vers l'Est, et l'axe (Oy) vers le Nord.

Question 3.

a. Étiqueter les axes ('x', 'y' ou 'z') sur les trois dessins de l'énoncé.

b. Tracer les axes sur les deux dessins des questions 1 et 2, et les étiqueter.

Question 4.

a. Sachant que x, y et z sont exprimés en centaines de mètres, donner l'altitude du point de la presqu'île d'abscisse $x = 0$ et d'ordonnée $y = 0$.

b. Positionner ce point sur chacun des dessins précédents.

c. (optionnelle) Mêmes questions pour le point correspondant à $x = 0$ et $y = 1$.

Question 5.

a. La ligne de niveau 0 dessinée à la question **1.a** est un ensemble de points dans le plan des variables x et y. Quelle est l'équation de cet ensemble ?

b. Exprimez cette équation à l'aide de la fonction f.

c. Mêmes questions pour la ligne de niveau 100m.

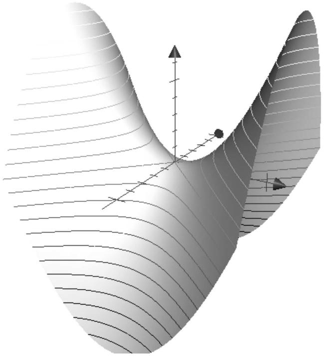
Question 6.

a. Le profil du relief au-dessus de l'axe Nord-Sud, dessiné à la question **2.b**, est un ensemble de points dans le plan des variables y et z. Quelle est l'équation de cet ensemble ?

b. Exprimez cette équation à l'aide de la fonction f.

c. En déduire l'altitude du point culminant de cet itinéraire. Vérifier graphiquement.

II. La selle de cheval



Le dessin montre le graphe de la fonction définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$. On a représenté les lignes de niveau d'altitudes entières $(0, 1, 2, ...)$.

Question 1. Lignes de niveau

a. Indiquer sur le dessin les trois courbes correspondant respectivement aux niveaux -1, 0, 1.

b. Donner l'équation de la ligne de niveau 1. En s'aidant du dessin fourni, représenter cette ligne de niveau (dans le plan des variables x et y).

c. Mêmes questions pour la ligne de niveau 0. En exprimant x en fonction de y, montrer par le calcul que cette ligne est la réunion de deux droites.

Question 2. Fonctions partielles

a. Donner l'expression de la fonction partielle $\varphi : x \mapsto f(x, 0)$. Dessiner son graphe (dans le plan des variables x et z). Représenter la courbe correspondante sur le dessin en trois dimensions.

b. Mêmes questions pour la fonction partielle $\psi : y \mapsto f(-1, y)$.

Nord

1.a et b Ouest Est

Sud

Haut

2.a et b Sud Nord

Bas

I.21. Groupes de TD, composantes connexes d'un graphe

Source: `groupes_de_TD.tex`.

Version imprimable: `groupes_de_TD.pdf`

Angle pédagogique : *Découverte. Théorie des ensembles, et structures de base*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice part d'un algorithme de parcours d'un graphe qui est donné aux étudiants sous forme d'un algorithme de création de groupe de TD.*

La première question est volontairement déroutante : un seul groupe suffit !

Arwen, Bilbo, Celebrindal, Dunadan, Eowyn, Frodon, Galadriel, Hurin, Isil, James Bond, Karine, Legolas, Morwen, Nimroth, Onomatopee, Peregrin, Quinine, Radagast, Silmarien, Thorin, Uinen, Voronwe, Wendy, Xerxes, Yavanna et Zorglub sont inscrits en UD Maths et ont leurs propres opinions sur les regroupements souhaitables en TD. Ils soumettent à l'administration la liste de leurs desiderata sous la forme suivante : (A,B), (A,F), (E,P), (G,L), (G,R), (G,T), (C,H), (I,H), (M,H), (S,N), (U,V), (Y,V). Par exemple, la présence de (A,B) dans la liste signifie que Arwen veut être dans le même groupe que Bilbo.

a. Quel est le nombre minimum de groupes de TD qui permet de satisfaire tout le monde ?

b. On cherche plutôt à former des groupes nombreux et petits.

(i). — Si x est l'un des 26 étudiants ci-dessus, on note $f(x)$ l'ensemble des étudiants qui figurent nécessairement dans le même groupe que x d'après la liste ci-dessus, soit parce que ils ont été demandés par x, soit parce qu'ils ont demandé x. Par exemple, $f(A) = \{B, F\}$ et $f(H) = \{C, I\}$. Ecrire tous les $f(x)$.

(ii). — Montrer que pour chaque étudiant isolé (c'est à dire tel que $f(x) = \emptyset$), on satisfait les demandes des étudiants en mettant x tout seul dans un groupe, et en mettant tous les autres ensemble.

c. On propose l'algorithme suivant de constitution du groupe de TD d'un étudiant donné x_0 :

$\texttt{groupe} := \{x_0\}$

<u>répéter</u>

$$\texttt{delta} := \left(\bigcup_{x\in\texttt{groupe}} f(x)\right) - \texttt{groupe}\ ;\ \texttt{groupe} := \texttt{groupe} \cup \texttt{delta}$$

<u>jusqu'à ce que :</u> $\texttt{delta} = \emptyset$.

(i). — Executer l'algorithme sur Arwen.

(ii). — Que conclure ?

d. Quel est le lien de cet exercice avec les relations d'équivalence ?

I.22. Hyperplans et famille de vecteurs en position générale

Source: `hyperplans.tex`.

Version imprimable: `hyperplans.pdf`

Angle pédagogique : *Ludique. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Ce sujet propose une jolie question de mathématiques. La preuve est assez difficile à trouver, bien que la réponse semble intuitivement évidente (quoiqu'en dimension 47 ?...) Après avoir laisser les étudiants explorer la question, on leur "vend" donc un schéma de preuve ; la difficulté consiste alors à comprendre ce schéma (qui implique une récurrence subtile), et à en rédiger tous les détails de la façon la plus convainquante possible.*

Remarque sur la deuxième partie : on peut aussi montrer la version affine de cette propriété : il existe dans $\mathbb{R}^n$ une famille infinie de vecteurs telle que dès qu'on en prend $n+1$, ils sont affinement indépendants (prendre les vecteurs du type $(x, x^2, \dots, x^n)$). Une conséquence intéressante, et immédiate, est un théorème de plongement "du type Whitney" : tout graphe se plonge dans $\mathbb{R}^3$ (sans point double, contrairement à $\mathbb{R}^2$) ; et plus généralement, tout complexe simplicial de dimension k se plonge dans $\mathbb{R}^{2k+1}$ (et on comprend bien la raison du "$2k+1$"). Le plongement des graphes est probablement à la portée des étudiants de DEUG, et donnerait une motivation intéressante à l'exercice ; malheureusement, celui-ci deviendrait beaucoup plus long.

I. Hyperplans de $\mathbb{R}^n$

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :

> Question $\mathbb{R}^n$ *est-il réunion d'un nombre fini d'hyperplans ?*

On rappelle qu'un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

Question 1. Exploration

a. Cas $n = 2$ Traduisez le problème en dimension 2. Avez-vous une idée intuitive de la réponse ? Pouvez-vous prouver que votre intuition est juste ?

b. Cas $n = 3$ Mêmes questions pour $n = 3$.

c. Cas général Avez-vous une idée de la réponse dans le cas général ? Comment pourrait-on écrire une preuve ?

Question 2. Petites questions

Commencez par répondre aux questions suivantes :

a. Si H_1 et H_2 sont deux hyperplans de $\mathbb{R}^n$, quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?

b. Même question pour un hyperplan H_1 et un plan P (c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 2).

Question 3. Aide à la preuve en dimension $n \geq 3$

On propose le schéma de preuve suivant :

"On raisonne par récurrence sur la dimension. On considère des hyperplans $H_1, \ldots, H_k$ dans $\mathbb{R}^n$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve un vecteur e_1 qui est dans H_1 et qui n'est dans aucun des autres hyperplans. De même, on trouve un vecteur e_2 qui est dans H_2 et qui n'est dans aucun des autres hyperplans. On se place ensuite dans le plan P engendré par e_1 et e_2. En étudiant dans P les sous-espaces $H_i \cap P$, on arrive à la conclusion."

Il manque bien sûr beaucoup de détails. Rédigez soigneusement une preuve en suivant ce schéma.

II. Famille de vecteurs en position générale

> *Le but de cette partie est de trouver, dans $\mathbb{R}^n$, une famille $\mathcal{F}$ contenant une infinité de vecteurs et ayant la propriété suivante : dès qu'on choisit n vecteurs dans la famille $\mathcal{F}$, ils sont linéairement indépendants.*

Question 1. Cas $n = 2$

Traduire la question dans $\mathbb{R}^2$; trouver une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui répond à la question. Pouvez-vous en trouvez d'autres ?

Question 2. Cas $n = 3$

Traduire la question dans $\mathbb{R}^3$. Essayer d'y répondre.

Question 3. Suggestion

On propose d'étudier la famille $\mathcal{F}$ contenant tous les vecteurs du type

$$v(x) = (1, x, x^2, \ldots x^{n-1}).$$

Montrer que cette famille répond au problème.

Indication Si n vecteurs sont liés, il existe un hyperplan qui les contient (pourquoi ?) ; quelle est l'équation cartésienne d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$?

Question 4. Retour sur la partie I

A l'aide de la famille $\mathcal{F}$, trouver une nouvelle preuve pour la partie I.

Indication Combien de vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ un hyperplan peut-il contenir au maximum ?

I.23. Introduction à l'algèbre linéaire : les carrés magiques d'ordre 3

Source: `carres-magiques.tex`.

Version imprimable: `carres-magiques.pdf`

Angle pédagogique : *Découverte. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice est destiné à être posé au tout début du cours d'algèbre linéaire, voire avant le cours. On tente d'introduire "naturellement" certaines des notions-clés, comme la définition d'espaces vectoriels, les bases (et l'existence de bases distinctes), la notion de somme directe, les applications linéaires... Remarquons que l'espace vectoriel des carrés magiques a un avantage (pédagogique) sur les espaces* $\mathbb{R}^n$ *ou sur l'espace des polynômes : il n'a pas de base canonique.*

Cet exercice est fortement inspiré d'un devoir donné à l'université de Lille, que l'on trouve dans l'annexe 7 du texte de Marc Rogalski, Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année*, (cahier de DIDIREM 11, octobre 91). On lira d'ailleurs avec profit ce texte d'une trentaine de pages qui présente un enseignement pensé dans sa globalité ("ingénieurie longue"), ce qui n'empèche pas d'en extraire des petits morceaux...*

Il s'agit d'une activité de découverte de nouvelles notions, et il est difficile de rédiger un sujet sans interventions d'un professeur... On a donc signalé par le symbole (*) tous les endroits qui nécessite quelques commentaires. Voici des commentaires sur ces commentaires, dans l'ordre d'apparition du texte :

1. *On espère que les étudiants auront trouvé les carrés magiques constants, et au moins un autre (on peut éventuellement faire intéragir tous les groupes d'étudiants pour cela). Introduire ici la notion de somme, de produit extérieur (d'autres idées peuvent apparaitre, à l'aide de symétries par exemple : elles pourraient déboucher sur l'idée d'application linéaire, mais il vaut sans doute mieux les laisser tomber pour le moment...). Remarquer que l'on définit des nouvelles opérations (très simples), sur l'ensemble des carrés magiques E. Introduire le terme* espace vectoriel*, si le cours correspondant n'a pas déjà été fait. On peut aussi parler de* combinaison linéaire*. Faire remarquer que l'on n'est pas sûr d'avoir trouvé tous les carrés magiques...*
2. *La question n'est pas très facile à faire comprendre, et il faudra peut-être la reformuler ; on espère trouver des schémas du type*

a	*b*	*c*
?	*e*	?
?	?	?

ou bien

a	*b*	?
?	*e*	?
?	?	*i*

3. *Simple vérification des résultats.*
4. *Idem.*

Quand vous rencontrez le symbole (*), appelez le professeur et expliquez-lui vos résultats.

I. Définition, objectifs

Dans cet exercice, on appellera *carré magique* un tableau carré contenant 9 nombres réels, tel que les sommes des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales soient égales :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

avec

$$\begin{array}{ccc} a+b+c=S & a+d+g=S & a+e+i=S \\ d+e+f=S & \dots & c+e+g=S \\ g+h+i=S & \dots & \end{array}$$

où le nombre S s'appelle *la somme* du carré. [19]

Le but de l'exercice est de trouver *tous* les carrés magiques.

Sur le plan pédagogique, l'exercice est en quelque sorte un prétexte pour introduire dans ce cadre certaines des notions-clés de l'algèbre linéaire : *espaces vectoriels, bases, dimension, sommes directes, applications linéaires.* [20] Notamment, on n'essaiera pas de résoudre le problème de la manière la plus simple ou la plus courte, on tentera plutôt de bien comprendre les propriétés des objets étudiés.

Plus précisément, voici une stratégie possible : le problème revient à résoudre un système de 8 équations linéaires à 10 inconnues, et on a des méthodes pour faire ça. Mais ça n'est pas très agréable : avec un peu d'astuce et de réflexion, on va essayer de diminuer le nombre de calculs.

II. Fabrication de quelques carrés magiques

Question 1. Premiers exemples

Trouvez des exemples de carrés magiques les plus simples possibles. Essayez d'obtenir deux exemples "les plus différents possibles".

Question 2. Machines à fabriquer de nouveaux exemples

Comment peut-on obtenir de nouveaux exemples à partir de carrés magiques connus ? Essayez de trouver le plus possible de tels procédés.

(*)

III. Une réduction du problème

Question 1. Décomposition

Montrer que tout carré magique peut se décomposer comme somme d'un carré magique constant et d'un carré magique de somme nulle.

Question 2. Unicité

Montrer que cette décomposition est unique.

[19] Les amateurs de casse-tête rajoutent d'autres types de conditions, ce qui change radicalement la nature du problème (et le rend bien plus difficile).

[20] Les notions introduites ici de manière un peu floue seront précisées en cours.

Question 3.

Vérifiez que ces deux sous-ensembles de carrés magiques sont aussi des espaces vectoriels (on dit que ce sont des *sous-espaces vectoriels* de l'espace vectoriel E des carrés magiques).

On traduit les propriétés de cette partie en disant que *l'espace vectoriel des carrés magiques est la somme directe du sous-espace formé des carrés de somme nulle et du sous-espace formé des carrés constants.*

En quoi ceci permet-il de simplifier le problème ? Formuler cette simplification le plus précisément possible.

IV. Résolution

On va chercher maintenant à déterminer tous les carrés magiques de somme nulle (répétons-le, en évitant de résoudre un "gros" système d'équations).

Question 1.

En pratique, quand on essaie de construire un carré magique (de somme nulle), on commence par remplir quelques cases par des valeurs arbitraires (il y a bien sûr énormément de choix possibles), puis, au bout d'un moment, on n'a plus du tout le choix : la suite du remplissage du carré est entièrement déterminée par les valeurs choisies dans les premières cases. Donnez un ou plusieurs exemples de remplissages de quelques cases du carré qui forcent ainsi toute la suite du remplissage du carré.

(*)

Question 2.

Choisir l'un des schémas trouvés à la question précédente, et compléter dans le carré les cases restantes en fonction des cases présélectionnées. Obtient-on toujours ainsi un carré magique de somme nulle ? Sinon, que faut-il rajouter ?

Question 3.

À partir de la question précédente, exprimer tous les carrés magiques de somme nulle à partir de quelques carrés particuliers.

En déduire l'ensemble de tous les carrés magiques, sous la même forme.

(*)

V. Encore quelques notions d'algèbre linéaires

Question 1. Bases et dimension

a. Combien faut-il de coefficients, au minimum, pour exprimer l'ensemble des carrés magiques ?

Ce "nombre minimum de paramètres à utiliser pour décrire un espace vectoriel" s'appelle la *dimension* de l'espace vectoriel. Donner de même la dimension du sous-espace vectoriel des carrés magiques constants, puis celle des carrés magiques de somme nulle.

b. Les carrés magiques particuliers utilisés à la question 3 pour décrire l'ensemble de tous les éléments de l'espace vectoriel forment *une base* de l'espace vectoriel (à condition toutefois qu'on en ait pris le moins possible).

Quel lien y a-t-il entre une base et la dimension ?

Un espace vectoriel peut-il avoir plusieurs bases différentes ?

Voyez-vous des liens entre la somme directe et les bases ?

(*)

VI. En guise de conclusion

A quoi sert l'algèbre linéaire ? Malheureusement, il n'y a pas de réponse simple au niveau DEUG : en effet, la plupart des problèmes pour lesquels on va utiliser l'algèbre linéaire peuvent aussi se résoudre de manière élémentaire, la plupart du temps en resolvant un système d'équations ; et ceci peut donner l'impression qu'on remplace des calculs fastidieux mais simples par des arguments et des concepts très compliqués, très abstraits : donc, l'utilité en tant qu'*outil* n'est pas très claire (en DEUG en tout cas !)

On peut quand même faire sentir l'intérêt de l'algèbre linéaire : celle-ci permet d'*unifier* des problèmes et des situations a priori très différentes, en donnant un cadre général dans lequel ces problèmes vont avoir le même aspect. Une telle démarche s'appelle *la méthode axiomatique*, et est fondamentale dans les mathématiques récentes.

Plus précisément, on commence par remarquer que l'on sait additionner deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ou deux fonctions, ou deux polynômes, ou deux suites de réels (comment ?...), ou deux carrés magiques ; et qu'on sait aussi multiplier chacun de ces objets par des réels.

Puisque ces objets (différents) peuvent subir le même type d'opération, ayant les mêmes propriétés formelles, les raisonnements ou les concepts qui utilisent uniquement ces opérations vont être valables dans chacun des cinq cadres cités. Par exemple, les notions de droite, de plan, de repère (on dira *base*), que l'on connait déjà dans $\mathbb{R}^3$, vont aussi être valables pour des espaces de fonctions ou de polynômes ! La propriété qui dit que "dans $\mathbb{R}^3$, deux plans ont toujours une droite en commun" deviendra ainsi "dans tout espace vectoriel de dimension 3, deux sous-espaces vectoriel de dimension 2 ont toujours un sous-espaces de dimension 1 en commun" et sera vraie quelle que soit la nature des éléments de l'espace vectoriel (fonctions, polynômes, suites, carrés magiques ou autres ; et on pourra d'ailleurs la généraliser à des dimensions supérieures).

Ce point de vue donne également un support géométrique, et permet de visualiser les objets : dans l'exercice, l'ensemble des carrés magiques s'avère être un espace vectoriel de dimension 3, ce qui permettra d'y faire exactement les mêmes opérations et les même raisonnements que dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, que l'on "voit" beaucoup mieux que l'espace des carrés magiques.

Même si le DEUG n'en donne qu'un tout petit aperçu, la quantité de situations qui peuvent être modélisées par l'algèbre linéaire est immense, et va de questions purement mathématiques jusqu'à des problèmes très concrets d'écologie (dynamique des populations), de météorologie, d'économie, de physique...

I.24. Introduction à la notion d'axiome

Source: `groupes.tex`.
Version imprimable: `groupes.pdf`
Angle pédagogique : *Découverte. Groupes, et autres stuctures algébriques*

Objectifs et commentaires. *Ce TD est plutôt conçu comme étant préparatoire à un cours, de façon à amener le plus naturellement possible la notion d'axiome. Il semble que le statut des axiomes déstabilise beaucoup les étudiants lorsqu'on entame l'algèbre linéaire, d'autant plus qu'un espace vectoriel est une superposition de plusieurs structures qu'on leur ¡¡ parachute ¿¿ en une seule définition...*

I. Expériences

Les deux premières questions sont deux variantes du même problème mathématique.

Question 1. Inspiration musicale

soit $\mathcal{G} = \{\,\text{do,ré,mi,fa,sol,la,si}\,\}$ la gamme musicale. On s'intéresse aux intervalles (écarts de notes) : par exemple, la tierce — en dépit de son nom — est un écart de *deux* notes. Nous allons regarder la tierce comme une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$, qui ¡¡ décale ¿¿ de deux notes, et on la notera *tierce*. Ainsi on a $\mathit{tierce}(\text{do}) = \text{mi}$. Les autres intervalles de la gamme sont désignés ci-dessous :

la *seconde* : écart de 1 note
la *tierce* : écart de 2 notes
la *quarte* : écart de 3 notes
la *quinte* : écart de 4 notes
la *sixte* : écart de 5 notes
la *septieme* : écart de 6 notes
la *unisson* : un écart de 0 note est parfois appelé *unisson*.

On ne tient pas compte de l'*octave*, écart de 7 notes, c'est-à-dire qu'on considère comme égales une note, et elle-même plus une octave. On a obtenu un ensemble $G = \{\mathit{unisson}, \mathit{seconde}, \mathit{tierce}, \mathit{quarte}, \mathit{quinte}, \mathit{sixte}, \mathit{septieme}\}$, sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathcal{G}, \mathcal{G})$. On peut donc composer les éléments de G, en tant qu'applications.

a. Calculez $\mathit{tierce} \circ \mathit{quarte}$, $\mathit{quarte} \circ \mathit{tierce}$, $\mathit{seconde} \circ \mathit{septieme}$, $\mathit{sixte} \circ \mathit{quinte}$.

b. Montrez que quand on compose deux éléments de G, le résultat est encore un élément de G. On dit que G est *stable* pour l'opération $\circ$.

c. Si $x \in G$, on note x^2 pour $x \circ x$, x^3 pour $x \circ x \circ x$, etc. Montrez que pour tout $x \in G$, on a $x^7 = \mathit{unisson}$.

Question 2. Inspiration complexe

soit $H = \{\, e^{2ik\pi/7} \mid k \in \mathbf{Z} \,\}$.

a. Montrez que $\operatorname{card}(H) = 7$, et que H est stable pour la multiplication.

b. Montrez que $\forall z \in H, \quad z^7 = 1$.

Question 3. Symétries du pentagone régulier

Trouvez toutes les isométries du plan qui laissent le pentagone régulier invariant (on admettra qu'il n'y en a que 10). Leur ensemble est noté G.

a. Montrez que si on prend s et t deux telles isométries, alors $s \circ t$ en est encore une.

b. Montrez que $\forall s \in G, \quad s^{10} = \mathrm{id}$.

II. ¡¡ Axiomatisation ¿¿

On remarque que les résultats des exercices 1 et 2 se ressemblent. C'est là le début de la démarche axiomatique : lors de démonstrations (sur des cas particuliers) mettant en jeu certains objets (dans nos exemples, les ensembles G ou H), on essaie d'identifier précisément quelles sont les propriétés essentielles qui ¡¡ font que ça marche ¿¿ . On formule ensuite une définition abstraite qui englobe le cas de nos objets G ou H, dans laquelle les propriétés nécessaires sont appelées axiomes*.*

Cette démarche est au coeur des maths modernes - depuis le 19ème siècle. Elle est difficile car il n'est pas aisé d'identifier les propriétés en question, celles qui seront ¡¡ les bonnes ¿¿ pour le mathématicien. Par exemple, la notion de groupe *que nous présentons maintenant est née en presque un siècle. Galois, dans les années 1820, l'a pressentie via des ensembles de permutations (bijections d'un ensemble fini) ; puis Cayley et d'autres ont étudié des groupes vers 1880, sous l'aspect d'automorphismes d'espaces linéaires. Mais ce n'est qu'au début du vingtième siècle que la définition a été formulée une fois pour toutes, et fixée telle que nous la connaissons aujourd'hui.*

En regardant les exercices précédents on arrive à énoncer une définition :

Définition : *Un* groupe *est un ensemble G avec une application appelée* loi de composition *et notée*

$$\begin{array}{rccc} * : & G \times G & \rightarrow & G \\ & (g,h) & \mapsto & g * h \end{array}$$

tels que

(N) *il existe un élément e appelé* neutre *vérifiant* $\forall x \in G,\ e * x = x * e = x$.

(A) *la loi $*$ est* associative, *c'est-à-dire* $\forall (x,y,z) \in G^3,\ (x*y)*z = x*(y*z)$.

(I) *tout élément de G a un (unique)* inverse *:* $\forall x \in G,\ \exists y \in G,\ x * y = y * x = e$.

Presque tout le temps, l'inverse de x est noté x^{-1}. De même on écrit x^2 pour $x * x$, et x^0 désigne le neutre e. On peut donc définir x^i pour n'importe quel entier $i \in \mathbf{Z}$.

Question 1. Exemples

Montrez que les ensembles des exercices 1 et 2, munis de leurs lois, sont des groupes.

D'autres exemples sont l'ensemble des réels, muni de l'addition, ou l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Attention : $\mathbf{N}$ muni de l'addition n'est pas un groupe ! On voit sur ces exemples qu'un groupe peut être de cardinal fini, ou non. On va maintenant, pour cet objet général qu'est le *groupe*, démontrer un résultat semblable à celui des exercices de départ :

Soit G un groupe fini à n éléments ($n \geq 1$). Alors, pour tout $x \in G$, on a $x^n = e$.

III. Démonstrations

Question 1. un cas simple

Dans cet exercice on suppose de plus que le groupe est *commutatif*, c'est-à-dire que l'on suppose

$$\forall (x, y) \in G,\ x * y = y * x\ .$$

a. Soit $x \in G$ fixé. Montrez que l'application $f_x : G \to G$ telle que $f_x(g) = g * x$, est une bijection. Donnez sa bijection réciproque.

b. Expliquez pourquoi cela a un sens de parler du ¡¡ produit ¿¿ $g_1 * \cdots * g_n$ de tous les éléments de G, dans n'importe quel ordre.

c. Montrez que $g_1 * \cdots * g_n = (g_1 x) * \cdots * (g_n x)$. Déduisez-en que $x^n = e$.

Question 2. cas général

Dans cet exercice on ne suppose plus que G est commutatif (cf question précédente). Par ailleurs, pour alléger la notation, on désormais xy au lieu de $x * y$.

a. En considérant la suite $1, x, x^2, \ldots$, montrez qu'il existe un entier $l \geq 1$ tel que $x^l = e$.

b. Désormais on choisit pour l le plus petit de ces entiers. Pour un élément $g \in G$, on note

$$C(g) = \{\, x^i g \,\}_{i \in \mathbf{Z}}\ .$$

c. Montrez que $\mathrm{card}(C(g)) = l$ (utilisez la bijection f_g de l'exercice précédent).

d. Soit g_1 et g_2 dans G. Montrez qu'on a soit $C(g_1) \cap C(g_2) = \emptyset$, soit $C(g_1) = C(g_2)$.

e. Montrez qu'il existe un nombre fini r d'éléments $g_1, \ldots, g_r$ tels que

$$G = C(g_1) \sqcup \cdots \sqcup C(g_r) \qquad (\sqcup \text{ est l'union disjointe}).$$

f. En calculant les cardinaux des 2 ensembles de l'égalité précédente, conclure que $x^n = e$.

I.25. Introduction à l'étude des suites de nombres

Sources et figures: `introduction-suites/`.

Version imprimable: `introduction-suites.pdf`

Angle pédagogique : *Découverte. Suites*

Objectifs et commentaires. *La première partie, sous forme de quizz, a pour but de faire prendre conscience aux étudiants de la naïveté de leur représentation des suites. Dans le même temps, elle permet de constituer un petit réservoir d'exemples de suites un peu plus compliquées que les suites monotones du Lycée. On espère qu'après cette étude, les étudiants sont "psychologiquement préparés" à accepter la nécessité d'une définition formelle de la limite. On leur demande alors de retrouver quelques définitions (ce texte s'adressait à des étudiants ayant déjà eu un cours sur les limites de fonctions, AVANT le cours sur les suites). Après quoi, on leur demande de démontrer quelques résultats très simples à partir de la définition de la limite. On propose ensuite des exercices plus délicats.*

Dans le bilan qui suit, on a essayé de leur expliquer quelques aspects des preuves avec "ϵ". En particulier, on démonte la partie purement mécanique, afin d'isoler les endroits où il y a besoin d'une vraie réflexion. Et on tente de leur expliquer brièvement quelques-uns des pièges concernant les variables de la démonstration. Les preuves proposées par les étudiants sont souvent incorrectes, par manque de maîtrise du langage mathématique ; et il est en général très difficile de leur expliquer "en direct" où se situe leurs erreurs de raisonnement. On espère pouvoir utiliser ce texte comme une référence pour ce genre de situation. Bien entendu, le texte est très incomplet et nécessiterait de nombreuses améliorations...

Il faut compter une séance de deux heures pour le Quizz, une autre pour les premier exemples simples. On peut ensuite faire le bilan, puis leur proposer éventuellement de s'attaquer aux exercices plus compliqués.

Dans tout le texte, les suites considérées sont toutes à valeurs réelles.

I. Testez votre intuition

Question 1. Dessins

Dessiner l'allure des suites $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, $\left(-\frac{1}{n}\right)$, $((-1)^n)$, $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, $((-1)^n.n)$, $\left(n\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$.

Question 2. Quizz

Répondre par VRAI ou FAUX (essayez de justifier vos réponses par une preuve ou un contre-exemple[21]) :

a. Si une suite est bornée, alors elle admet une limite.

[21] Pour les contre-exemples, on peut commencer par faire un dessin, avant d'essayer de trouver une formule explicite ou une définition par récurrence.

b. Si (u_n) est une suite strictement positive et convergente, alors $\lim(u_n) > 0$.

c. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Alors cette suite est croissante.

d. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Alors cette suite est croissante à partir d'un certain rang.

e. Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positives et qui tend vers 0. Alors cette suite est décroissante à partir d'un certain rang.

f. Toute suite positive non bornée tend vers $+\infty$.

g. Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

h. Toute suite positive croissante non bornée tend vers $+\infty$.

Le but du "quizz" ci-dessus était de vous faire prendre consience du fait suivant : l'image mentale qu'on a d'une "suite qui tend vers une limite l (finie ou infinie)" est généralement trop simpliste. Dans de nombreux cas (suite qui n'est pas monotone à partir d'un certain rang, par exemple), notre intuition devient trompeuse. C'est pour cette raison qu'a été introduite la définition "en ε"...

II. À propos des définitions "en εpsilon"

Pendant longtemps (jusqu'au XIXème siècle), les mathématiciens ont manipulé des suites et des fonctions en se contentant de la définition intuitive de la limite, sans rencontrer de problème particulier. Puis, ils sont tombés sur des propriétés plus subtiles, où l'intuition les a conduits à des contradictions. Ils ont alors commencé à critiquer le manque de rigueur en Analyse (en comparant par exemple à d'autres domaines des mathématiques comme l'arithmétique), et ils ont ressenti le besoin de se donner des **définitions précises**.
Ceci n'a pas été sans mal. En 1821, Cauchy (voir courte biographie à la fin de ce texte) propose la définition suivante : "*Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres*" ; en 1835, De Morgan écrit : "*Laissez-moi rendre x aussi petit que je veux, et je pourrai rendre $7 + x$ aussi proche de 7 que* vous *voulez*" ; enfin, Weierstrass écrit la définition moderne de la limite, avec les ϵs et les δs, entre 1840 et 1860. Une des difficultés était que les notions de variables et de fonctions n'étaient pas non plus clairement définies.
Ces définitions ont représenté **un progrès énorme**, puisqu'elles permettent de savoir exactement de quoi on parle, et de distinguer avec certitude les propriétés vraies des propriétés fausses.
Mais il ne faut pas cacher que ces définitions ont aussi **un gros désavantage** : elles sont difficiles à comprendre, et surtout très difficiles à manipuler. Atteindre la certitude a un prix : il faut pour cela accepter de passer un certain temps à se familiariser, progressivement, avec ces notions.
En particulier, les premiers exercices peuvent être un peu frustrants, puisqu'on a l'impression de se fatiguer beaucoup pour démontrer des évidences. Il ne faut pas oublier que ce ne sont que "des gammes", et qu'il faut commencer par faire des gammes avant de pouvoir jouer de la vraie musique...

Dans tous les exercices qui suivent, la règle du jeu est d'obtenir une rédaction la plus convainquante possible, en utilisant chaque fois qu'il le faut la définition "en ϵ" de la limite.

III. Exercices simples avec le formalisme en "ϵ"

Question 1. Préliminaires

Donner la définition...

a. d'une suite ;

b. de sa limite éventuelle[22] ;

[22] Si le cours n'a pas encore eu lieu, inspirez-vous de la définition de la limite pour une fonction.

c. d'une suite bornée ; d'une suite non bornée ;

d. d'une suite croissante ;

e. d'une suite croissante à partir d'un certain rang.

Question 2. Applications directes de la définition

Montrer les propriétés suivantes :

a. La suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

b. Soit (u_n) une suite qui tend vers 1 ; alors cette suite est strictement positive à partir d'un certain rang (traduire d'abord cette phrase avec des quantificateurs).

c. Si une suite admet une limite finie, alors elle est bornée.

d. Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. Alors la suite (u_{n+100}) tend aussi vers 0. Même chose pour la suite (u_{2n}). **Aide** pour comprendre ce qu'est la suite (u_{n+100}) : prenez $u_n = 1/n$, écrivez les premiers termes des suites (u_{n+100}), (u_{2n}), (u_{n^2}).

IV. Exercices plus difficiles

Question 1. Suites de rang pair et impair

Soit (u_n) une suite telle que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers 0. Montrer que la suite (u_n) tend aussi vers 0.

Remarque. Si ce résultat vous paraît évident, alors vous trouverez sûrement également évident l'énoncé suivant : Soit (u_n) une suite telle que les sous-suites (u_{2n}), (u_{3n}), (u_{4n}), (u_{5n}), ... tendent toutes vers 0 ; alors la suite (u_n) tend vers 0. Pourtant ce dernier énoncé est FAUX ! (pensez à la suite (u_n) qui vaut 1 si n est un nombre premier, et 0 sinon). Comme quoi, les ϵ et les η sont parfois utiles...

Question 2. Critère séquentiel de la continuité

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue en 0 si et seulement si elle vérifie le *critère séquentiel de la continuité : pour toute suite (u_n) convergeant vers 0, la suite $f(u_n)$ converge vers $f(0)$.*

Question 3.

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet une limite finie l en $+\infty$. Quel est le comportement (en $+\infty$) de la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \int_n^{n+5} f(t)dt \qquad ?$$

Indication : essayer de deviner la valeur de cette intégrale quand n est très grand (à l'aide d'un dessin), puis rédiger une preuve.

Remarque. Si le résultat ci-dessus ne vous parait pas nécessiter de preuve, alors la convergence de la suite

$$w_n = \int_n^{2n} f(t)dt$$

devrait également vous paraître évidente. Pourtant, essayez avec $f(t) = \frac{1}{t}$; bien que $f(t)$ tende vers 0 quand t tend vers $+\infty$, vous verrez que la suite w_n ne tend pas vers 0, mais vers $\ln(2)$. Mieux : si on prend $f(t) = \frac{\sin(\ln(t))}{t}$ (qui tend également vers 0 quand t tend $+\infty$), on peut vérifier que la suite w_n ne converge pas (il existe une sous-suite de w_n qui tend vers $-\ln(2)$, et une sous-suite qui tend vers $\ln(2)$) ! Encore un cas où les ϵ et les η évitent de dire des bêtises !

Question 4. Suites d'entiers

Donner la définition d'une suite stationnaire. Montrer qu'une suite d'entiers qui tend vers une limite finie est stationnaire.

Question 5. Extraction

On appelle *suite extraite de la suite* (u_n) (ou *sous-suite de* (u_n)) "n'importe quelle suite obtenue à partir de (u_n) en oubliant certains termes".

a. Transformez cette définition vague en une vraie définition.

b. Choisissez une suite (u_n) bornée non convergente (voir le quizz, question I.2.a). Trouvez une suite extraite de (u_n) qui est convergente. Trouvez une autre suite extraite de (u_n) qui converge vers une autre limite.

c. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui est croissante. (**Indication :** commencez par relire le quizz, question I.2.d ; faites un dessin d'un contre-exemple à cette affirmation du quizz ; sur le dessin, comment extraire une suite croissante ? Puis construire la suite extraite, par récurrence, dans le cas général.)

Question 6. Vers l'idée de "valeurs d'adhérence"...

a. Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois les valeurs 1 et 2 ?

b. Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois les valeurs 1 et 2 et 3 ?

c. Existe-t-il une suite qui prend une infinité de fois la valeur 1, ET une infinité de fois la valeur 2, ... ET ainsi de suite pour CHAQUE entier positif k ?

d. Existe-t-il une suite (u_n) à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que : pour tout réel x entre 0 et 1, la suite (u_n) s'approche arbitrairement près de x, et à un rang arbitrairement grand ? (Commencer par traduire cette propriété avec des "ϵ").

V. Bilan : déboulonnage des preuves en “ ϵ”

Pendant la première séance sur les suites, vous avez répondu au “Quizz”. Le but était de voir que l'étude des suites est pleine de pièges, certaines suites ayant un comportement compliqué. Cette complexité a conduit les mathématiciens à adopter la définition de la limite d'une suite “en ϵ”. Pendant la deuxième séance, vous avez écrit certaines définitions, puis essayé de démontrer quelques propriétés simples à l'aide de ces définitions. Ce bilan contient les preuves des propriétés de la question 2 (a, b et d). Mais surtout, on a tenté d'expliquer en détail comment ces preuves sont construites, de les “déboulonner”...

Nous allons essayer de comprendre quelques aspects des “preuves avec epsilons” sur des exemples de propriétés simples. Au lieu de nous contenter de donner des preuves de ces propriétés, nous allons plutôt tenter *une explication de la manière dont on parvient à écrire ces preuves.* Avant de commencer, rappelons la règle du jeu : *toutes les propriétés doivent être démontrées en revenant à la définition “en ϵ”, rien ne doit être considéré comme évident.*

Premier exemple

Montrons que la suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

Y a-t-il vraiment quelquechose à montrer ? ! Et bien oui, puisque on a convenu de ne rien considérer comme évident en ce qui concerne les suites. Pour savoir ce qu'il y a à montrer, on réécrit la question en utilisant la définition de la limite :

> À montrer : la suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$, c'est-à-dire
>
> $$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } \sqrt{n} \geq M.$$

Le fait d'avoir écrit cette phrase nous donne des renseignements sur ce que l'on doit faire. Puisque cette phrase commence par “$\forall M \in \mathbb{R}$...”, la démonstration devrait commencer par la phrase “Soit M un réel quelconque.” La suite de la phrase est “$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que ...”, ce qui signifie qu'on va devoir *fournir* un entier n_0, qui devra vérifier la fin de la phrase : “$\forall n \geq n_0,$ on a $\sqrt{n} \geq M$”. On a ainsi un squelette de rédaction :

> Soit M un réel quelconque.
> Définissons un entier n_0 de la manière suivante :
>
> ???
>
> Vérifions que $\forall n \geq n_0,$ on a $\sqrt{n} \geq M$:
>
> ???

Il reste à remplir les trous, c'est-à-dire surtout à trouver comment définir n_0. En regardant la fin, et en cherchant un peu, on voit que ça devrait marcher si $n_0^2 \geq M$. On vérifie, ce qui revient à écrire la fin de la preuve :

À montrer : la suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$, c'est-à-dire

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } \sqrt{n} \geq M.$$

Soit M un réel quelconque.
Définissons un entier n_0 de la manière suivante :
On choisit un entier n_0 plus grand que M^2 (par exemple le premier entier supérieur à M^2).
Vérifions que $\forall n \geq n_0$, on a $\sqrt{n} \geq M$:
Soit $n \geq n_0$. Puisque $n_0 \geq M^2$, on a $n \geq n_0 \geq M^2$. Donc $\sqrt{n} \geq M$.

Commentaires

1) On a découpé la phrase à montrer en trois morceaux :

$$\underbrace{\forall M \in \mathbb{R}}, \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \text{ tel que } \underbrace{\forall n \geq n_0, \text{ on a } \sqrt{n} \geq M}.$$

Chaque morceau correspond à une phrase du "squelette de preuve", soulignée dans la démonstration.

2) On doit montrer qu'une propriété est valable pour tout M, c'est pourquoi, dans la démonstration, on commence par se donner un réel M *quelconque* : le mot "quelconque" sert à rappeler qu'on n'a pas le droit de supposer quoi que ce soit qui restreigne la valeur de M. Par exemple, la preuve ne peut pas commencer par "Soit $M = 100$", ni par "Soit M un réel négatif" (bien sûr, par la suite, on pourrait séparer l'étude en différents cas, à condition que l'ensemble des cas étudiés couvre bien toutes les valeurs possibles de M).

Deuxième exemple

Montrons que si (u_n) est une suite qui tend vers 1, alors cette suite est strictement positive à partir d'un certain rang.

Là encore, on traduit l'hypothèse et le but avec des quantificateurs :

Hypothèse : (u_n) est une suite qui tend vers 1, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } 1 - \epsilon < u_n < 1 + \epsilon.$$

À montrer : (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang, c'est-à-dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } u_n > 0.$$

Cette fois-ci, la phrase à montrer commence par le quantificateur d'existence $(\exists n_0)$; il va donc falloir fournir un entier n_0 qui vérifie la propriété voulue $(\forall n \geq n_0, \text{ on a } u_n > 0)$. Le squelette de la preuve devrait donc être :

Définissons un entier n_0 de la manière suivante :

???

Vérifions que $\forall n \geq n_0$, on a $u_n > 0$:

???

D'autre part, l'hypothèse commence par "$\forall\epsilon > 0, \exists n_0$". Elle va donc nous fournir un entier n_0, *à condition qu'on dise pour quelle valeur de* ϵ on veut appliquer cette propriété.

Il faut donc réfléchir un peu pour trouver une valeur intéressante de ϵ. La propriété que l'hypothèse va nous donner est $1-\epsilon < u_n < 1+\epsilon$, celle que l'on voudrait obtenir est $u_n > 0$: on voit que ça devrait marcher avec $\epsilon = 1$. En effet, pour $\epsilon = 1$, l'hypothèse donne $0 < u_n < 2$, donc notamment $u_n > 0$ (l'autre inégalité ne sert pas). On peut maintenant rédiger une preuve.

Hypothèse : (u_n) est une suite qui tend vers 1, c'est-à-dire

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } 1-\epsilon < u_n < 1+\epsilon.$$

À montrer : (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang, c'est-à-dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } u_n > 0.$$

<u>Définissons un entier n_0</u> de la manière suivante. On applique l'hypothèse avec $\epsilon = 1$. L'hypothèse nous fournit alors un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, on a $0 < u_n < 2$.
<u>Vérifions que $\forall n \geq n_0$, on a $u_n > 0$</u> : c'est clair !

Commentaires

1) La première phase de la démarche consiste à écrire le "squelette de preuve", en fonction de la propriété à montrer. Avec un peu d'habitude, cette première phase devient (en partie) mécanique, automatique. Après quoi, on peut commencer à réflechir (on sait maintenant ce qu'on cherche) : dans le premier exemple, il fallait penser à choisir n_0 plus grand que M^2 ; dans le deuxième, il fallait penser à choisir $\epsilon = 1$. Enfin, on peut rédiger la preuve, et vérifier en même temps que le choix (de n_0) convient. Si ça ne marche pas, on essaie de voir ce qui coince, et on essaie un autre choix... Dans la rédaction finale, l'endroit où l'on a vraiment fait preuve de réflexion se réduit à une petite phrase ! Mais il s'agit de l'endroit le plus difficile de la preuve, là où il faut un peu d'imagination (quand on lit une preuve, ce sont les endroits où l'on se dit : ¡¡ Mais pourquoi fait-il ça ? Pourquoi choisit-il n_0 plus grand que M^2 ? Pourquoi prendre $\epsilon = 1$ et pas $\epsilon = 1997$? ¿¿ Une réponse est : ¡¡ Là, il a réfléchi ! On devrait voir plus loin pourquoi ça marche.¿¿). Personne n'a trouvé de méthode pour arriver à faire des maths sans avoir à réfléchir...

2) Dans chacun des deux exemples, on a écrit une définition de limite. Dans le premier cas, c'était une propriété *à montrer*. On a vu que ceci conduisait à considérer un réel M quelconque, sur lequel on n'avait aucun choix. Au contraire, dans le second cas, une définition de limite apparaissait dans l'hypothèse, autrement dit il s'agissait d'une propriété *à utiliser*. On l'a alors utilisée en choisissant une valeur de ϵ (ici $\epsilon = 1$). Retenons cette différence : pour *montrer* une phrase commençant par $\forall a$..., on se donne un a *quelconque* ; tandis que pour l'utiliser, *on peut choisir* le réel a.

Troisième exemple

Montrons la propriété suivante : Soit (u_n) une suite telle que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers 0 ; alors la suite (u_n) tend aussi vers 0.

Hypothèses : les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers 0, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_{2n}| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_{2n+1}| < \epsilon.$$

À montrer : la suite (u_n) tend vers 0, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_n| < \epsilon.$$

Soit ϵ un réel strictement positif quelconque. On applique la première hypothèse avec ce même ϵ ; ceci nous fournit un entier que l'on note n_1, tel que $\forall n \geq n_1$, on a $|u_{2n}| < \epsilon$ (appelons ceci la propriété P1). De même, en appliquant la deuxième hypothèse, on obtient un entier n_2 tel que $\forall n \geq n_2$, on a $|u_{2n+1}| < \epsilon$ (propriété P2).
Définissons alors un entier n_0 de la manière suivante : On choisit un entier n_0 plus grand que $2n_1$ et $2n_2 + 1$ (par exemple, $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$.
Vérifions que $\forall n \geq n_0$, on a $|u_n| \leq \epsilon$.
Soit $n \geq n_0$. On considère deux cas.
– Ou bien n est pair, et on écrit $n = 2n'$ (et donc $u_n = u_{2n'}$). Alors $n = 2n' \geq n_0 \geq 2n_1$, donc $n' \geq n_1$. D'après la propriété P1, on a alors

$$|u_n| = |u_{2n'}| < \epsilon.$$

– Ou bien n est impair, et on écrit $n = 2n' + 1$. On a $2n' + 1 \geq n_0 \geq 2n_2 + 1$, donc $n' \geq n_2$. On voit grâce à la propriété P2 que

$$|u_n| < \epsilon.$$

Dans tous les cas, on a $|u_n| < \epsilon$, ce que l'on voulait.

Commentaires

1) Les entiers "n_0" fournis par les deux hypothèses n'ont aucune raison d'être égaux : un entier n_0 qui marche pour la première peut très bien ne pas marcher pour la deuxième. C'est pourquoi, dans la démonstration, on doit choisir deux notations différentes (ici, on a choisi n_1 et n_2). Dans la preuve, on *ne peut pas* écrire :

> On applique les deux hypothèses ; ceci nous fournit un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, on a $|u_{2n}| < \epsilon$ et $|u_{2n+1}| < \epsilon$.

De même, l'entier n_0 qui apparaît dans la phrase à montrer (celui que l'on cherche) est encore différent. Pour être sûr de ne pas avoir de problème, on aurait pu choisir des notations différentes dès l'écriture des hypothèses et de la conclusion :

Hypothèses : les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers 0, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_1, \text{ on a } |u_{2n}| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_2, \text{ on a } |u_{2n+1}| < \epsilon.$$

À montrer : la suite (u_n) tend vers 0, c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_n| < \epsilon.$$

On aurait aussi pu changer les notations des "ϵ" : après tout, on ne sait pas *a priori* qu'on va choisir les mêmes valeurs dans les deux hypothèses. Nous reviendrons sur ces problème dans l'annexe 1.

2) Comme dans les deux premiers exemples, il y a un passage difficile, là où on définit n_0. Comment a-t-on trouvé qu'il fallait définir n_0 de cette façon "bizarre" ? À vrai dire, quand j'ai écrit cette preuve au brouillon, je n'ai pas trouvé la bonne définition de n_0 du premier coup ! On sent bien qu'il faut fabriquer n_0 à l'aide de n_1 et n_2 ; alors j'ai commencé par essayer de choisir simplement n_0 plus grand que n_1 et n_2. Et puis j'ai regardé si j'arrivais à écrire la fin de la preuve, ça a coincé, et j'ai vu ce qu'il fallait faire pour que ça ne coince plus (en réalité, mon deuxième essai n'était pas bon non plus, le cas où n est impair ne marchait pas ; mais la troisième fois était la bonne)...

3) La vérification finale est une petite démonstration à l'intérieur de la grande ("Vérifions que $\forall n \geq n_0$, on a $|u_n| \leq \epsilon$"). On lui applique les mêmes principes : en particulier, ce qu'on doit démontrer commence par "$\forall n \geq n_0$" ; par quelle phrase commence la petite démonstration ?... Pour une preuve plus longue, on peut avoir de cette manière plusieurs morceaux de démonstrations imbriqués les uns dans les autres, comme des poupées Russes.

Avant de conclure, quelques mots sur les variables

Dans les phrases à montrer, on écrit :

$$\forall M \in \mathbb{R}$$

Dans la démonstration, on écrit :

Soit M un réel quelconque.

Y a-t-il une différence profonde entre ces deux écritures ? Après tout, elles semblent dire exactement la même chose...

Il y a bien une différence, et elle concerne ce qu'on pourrait appeler la "durée de vie d'une variable". Revenons sur le premier exemple. Après qu'on ait écrit "Soit M un réel quelconque", on va utiliser la variable M pendant toute la démonstration : le "M" que l'on définit est le même que celui qui apparaît à la dernière ligne de la preuve. Par contre, quand on a écrit la définition de la limite,

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } \sqrt{n} \geq M$$

la variable M a une durée de vie très courte, elle n'existe que dans cette petite phrase. De même, regardons les hypothèses du troisième exemple :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_{2n}| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on a } |u_{2n+1}| < \epsilon.$$

Ces deux phrases sont indépendantes, et chacune des variables n'existe que dans sa propre phrase. En particulier, le "n_0" dans la première *n'a rien à voir* avec celui de la deuxième (voir à ce sujet le commentaire suivant ce troisième exemple). On dit que les variables ϵ, n_0 et n de chaque phrase sont "liées" à la phrase (on dit aussi que ce sont des variables "muettes").

Revenons sur le troisième exemple. La variable ϵ existe à partir de l'endroit où elle est définie (au tout début, "Soit ϵ..."). La variable n_0 apparaît un peu plus loin ("Définissons alors un entier n_0..."). Ces deux variables existent jusqu'à la fin de la preuve. Le cas de la variable n est plus intéressant. En effet, elle apparaît une première fois à la deuxième ligne, et elle "meurt" presque immédiatement (c'est la propriété P1 : "$\forall n \geq n_1$, on a $|u_{2n}| < \epsilon$"). Elle fait à nouveau une courte apparition à la ligne suivante (propriété P2 : "$\forall n \geq n_2$, on a $|u_{2n+1}| < \epsilon$"). Enfin, elle renait une dernière fois pour la fin de la preuve (à partir de "Soit $n \geq n_2$"). Il est très important de comprendre que ces trois "n" sont complètement indépendants. Bien qu'on ait utilisé la même notation, *il faut considérer que ce sont trois variables distinctes*. On aurait d'ailleurs pu choisir trois notations différentes, comme n, n' et n'' (mais la lecture aurait été moins agréable, surtout que la notation n' est encore utilisée plus bas à deux endroits, qu'on aurait dû transformer en n''' et n'''' !).

Pour ne pas s'embrouiller, il est fortement recommandé d'annoncer la naissance de toutes les variables par une expression du type "Soit M un réel quelconque", "Considérons un entier $n \geq n_2$", "On se donne une droite D du plan"... La seule exception concerne les phrases avec quantificateurs, dans lesquelles les variables meurent toutes à la fin de la phrase.

Le statut des variables dans le langage mathématiques est compliqué, il faudrait plus de place pour aborder tous ses pièges. Je vous recommande fortement la lecture d'un texte de Frédéric Pham, *"Ça dépend"*. Ce texte est disponible sur le Web :

http ://math1.unice.fr/ fpham/dep.pdf

Il fait aussi partie du livre *Fonctions d'une ou deux variables*, aux éditions Dunod.

Conclusion

Les démonstrations concernant les limites sont pleines de pièges. Certain de ces pièges peuvent être évités en suivant la méthode proposée, notamment :

- **écrire les phrases avec quantificateurs correspondant aux hypothèses et à la conclusion ;**
- **écrire toutes les phrases (en français) correspondant au "squelette" de la démonstration ;**
- **à chaque fois qu'une variable apparaît dans la preuve,**
  - **ou bien elle a été introduite par l'un des deux quantificateurs "$\forall$" et "$\exists$", et dans ce cas la variable est "muette", elle disparaît à la fin de la phrase ;**
  - **ou bien elle a été introduite par une expression du type "Soit M...", "Considérons un réel M...".**

Bien sûr, cette méthode est assez lourde. Vous remarquerez qu'elle est rarement totalement appliquée, même dans les livres. De plus, il ne suffit pas de savoir utiliser la méthode pour résoudre un exercice : comme on l'a remarqué, rien ne peut remplacer la réflexion. Mais la méthode permet de cerner clairement ce qu'il y a à trouver.

Conseil : tant que vous n'êtes pas absolument sûr de ne pas faire d'erreurs, appliquez la méthode au pied de la lettre. Le principe est toujours : on peut se permettre de ne pas écrire certains détails, à condition d'être capable de les écrire.

Quelle est la portée de cette méthode ? La méthode ne s'applique pas à toutes les preuves. Par exemple, montrons que la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ tend vers 0. On a déjà montré que la suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$. On peut appliquer le théorème du cours qui dit que si une suite (u_n) tend vers $+\infty$, alors la suite $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0, et c'est fini. Autrement dit, la méthode n'est pas très pertinente quand la preuve consiste principalement à appliquer un théorème. Avant de revenir à la définition "en ϵ" (et d'appliquer la méthode), il faut se demander si il n'y a pas un argument plus simple.

Exercice d'assimilation Pour bien assimiler les mécanismes que nous venons de voir, il faut les démonter en étudiant le plus possible d'exemples.

Prendre un cours sur les limites des suites ou des fonctions. Choisir une propriété démontrée dans le cours, où on utilise une définition de la limite (par exemple, la propriété de somme des limites : si deux suites (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers x et y, alors la suite $(x_n + y_n)$ converge vers $x+y$). Le but de l'exercice est de réécrire la preuve en faisant apparaître sa structure, son squelette.

a. L'hypothèse et la conclusion ne sont peut-être pas écrites avec des quantificateurs : dans ce cas, écrivez-les.

b. Repérer le squelette de la preuve, par exemple en soulignant les phrases-clés comme dans les rédactions des deux exemples que l'on vient de voir. Comme plus haut, chaque morceau de la phrase à démontrer doit avoir une contrepartie dans la preuve : le "$\forall \epsilon > 0$" doit correspondre à quelquechose comme "Soit $\epsilon > 0$" ; si un morceau dit "$\exists n_0$", on doit retrouver dans la preuve un endroit où on définit un n_0... Les phrases-clés sont parfois absentes. Elles sont alors implicites : repérer l'endroit où il faudrait les rajouter.

c. Repérer aussi les endroits où il a fallu réfléchir.

d. Détecter les propriétés utilisées, par exemple les hypothèses. Si on a utilisé une hypothèse qui commence par "$\forall \epsilon$...", à quelle(s) valeur(s) de ϵ l'a-t-on appliquée ?

e. Repérer enfin les endroits où les variables "naissent et meurent" (pour chaque variable, on peut faire un trait dans la marge qui va de l'endroit où elle apparaît jusqu'à l'endroit où elle disparaît). Y a-t-il des variables distinctes qui sont notées de la même façon ?

Refaire l'exercice avec d'autres exemples, des plus simples aux plus compliqués.

VI. Quelques repères historiques pour finir.

Augustin-Louis Cauchy (Paris 1789 - Sceaux 1857) est un des mathématiciens dont les contributions ont le plus fait progresser les mathématiques. Son "Cours d'Analyse" est un des textes fondateurs de l'analyse moderne. Cauchy y propose les premières ébauches des définitions modernes des notions de *fonction*, de *limite*, de *continuité*, etc. Cauchy est aussi considéré comme le fondateur de l'*analyse complexe*. Il contribua également de manière fondamentale à l'étude d'objets aussi divers que les *équations différentielles*, les *permutations d'ensembles finis*, les *polyèdres*, etc. Il fut professeur au Collège de France, à la Sorbonne et à l'École polytechnique, mais les évènements politiques (révolution de Juillet en 1830, coup d'État de Napoléon III en 1852) l'obligèrent néanmoins à s'exiler à plusieurs reprises, pendant de longues période (en Italie notamment). Avant de se consacrer aux mathématiques, Cauchy fut ingénieur des Ponts et Chaussés et dirigea la construction du port de Cherbourg (à 21 ans...).

Augustus De Morgan (Madras 1806 - Londres 1871) est surtout connu pour avoir formalisé et clarifié la notion de *raisonnement par récurrence.*

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde 1815 - Berlin 1897) commença sa carrière comme instituteur, avant de devenir un des très grand mathématiciens du XIXeme siècle. Ses travaux poursuivent l'effort de rigueur initié par Cauchy. . Ainsi, c'est Weierstrass qui (s'appuyant sur les travaux de Cauchy) propose ce qui constitue les définitions modernes de *limite d'un suite*, ou de *continuité d'une fonction.* Ce sont également les travaux de Weierstrass qui préciseront aussi le statut des nombres irrationnels, notion encore vague depuis la découverte de ces derniers par les Pythagoriciens (disciples de Pythagore). Enfin, l'œuvre majeure de Weierstrass est certainement le développement de la théorie des *fonctions analytiques* ou *fonctions développables en séries entières* : une fonction est développable en série entière si elle est limite (en un sens à préciser) de ses développements de Taylor à l'ordre n.

I.26. Introduction aux courbes de Bézier *(Nouveau)*

Sources et figures: `courbes-de-bezier/`.
Version imprimable: `courbes-de-bezier.pdf`
Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Géométrie différentielle*

Objectifs et commentaires. *Dans cet exercice, on définit les courbes de Bézier cubiques, et on étudie l'algorithme de tracé dû à Casteljau. L'introduction est extraite d'un* Cours de calculus*, voir http ://math.u-psud.fr/˜leroux.*

Vous êtes-vous déjà demandé comment l'ordinateur dessine les lettres que l'on voit à l'écran ? Dans les années 1980, quand les ordinateurs personnels commençaient tout juste à se répandre, l'ordinateur avait en mémoire un dessin de chacune des 26 lettres de l'alphabet (sans compter les lettres accentuées). Une lettre était stockée sous la forme d'une grille 8×8 dans laquelle chaque case était allumée ou éteinte (noire ou blanche, ce qui en mémoire correspond au symbole 0 ou 1). Par exemple, le "e" pouvait ressembler au dessin de gauche de la figure 4.

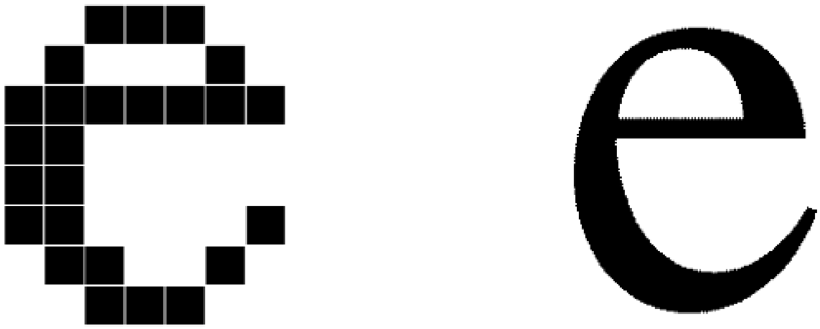


FIG. 4: Zoom sur un "e" : à gauche, avec un ordinateur des années 1980 ; à droite, avec un ordinateur actuel

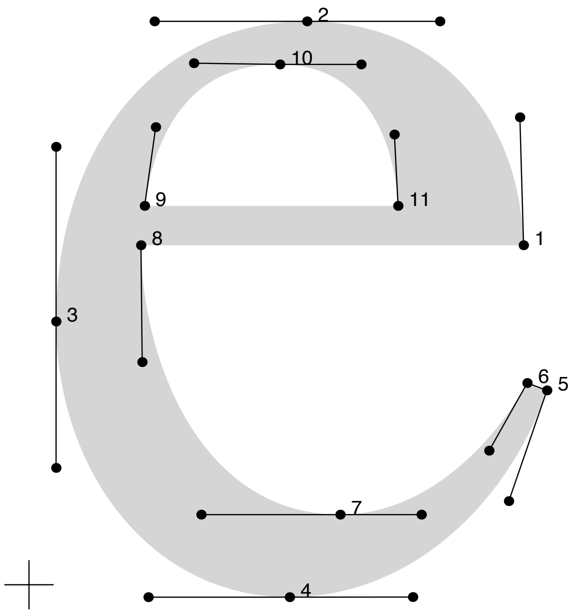
Cette méthode avait de nombreux inconvénients. En particulier, si l'on voulait grossir le texte à l'écran, l'ordinateur ne pouvait que grossir la grille, et on voyait apparaître les gros carrés qui définissaient la lettre, exactement comme sur le dessin ci-dessus. En comparaison, avec un ordinateur actuel, on peut zoomer "à l'infini" sans voir apparaître de gros carrés ; pourtant, l'écran lui-même est toujours une grille de pixels (ici, 1024 sur 768) : c'est donc que le "e" sur lequel on a zoomé n'est pas obtenu à partir d'une lettre de taille normale en effectuant un pur agrandissement (une homothétie !), sans quoi les carrés apparaîtraient assez vite. Il semble que les lettres ne soient plus définies au moyen d'une grille, mais à l'aide de courbes lisses, et que l'ordinateur recalcule des détails supplémentaires à chaque nouvel agrandissement. *Quelles sont les courbes utilisées pour produire ces lettres, et comment sont-elles définies ?*

Une recherche rapide nous apprend que ces courbes sont des *courbes de Bézier*. La plupart des logiciels de dessin permettent de tracer de telles courbes. On voit que ces courbes sont définies très facilement : on donne un point de départ, et une vitesse en ce point ; et un point d'arrivée, et une vitesse au point d'arrivée ; et le logiciel nous trace la courbe de Bézier correspondante. La figure 5 montre comment la lettre "e" peut être fabriquée en assemblant un certain nombre de courbes de Bézier. La géométrie se glisse parfois à des endroits inattendus...

Comment sont définies mathématiquement ces courbes de Bézier, et comment l'ordinateur les dessine ? C'est ce que nous allons apprendre dans cet exercice.

Histoire de Bézier (liocity.free.fr) Au début des années 60, les machines numériques ne savaient usiner de façon précise que des courbes simples comme des paraboles ou des ellipses. Une seconde catégorie d'objets, au contraire, offrait une forme a priori peu précise, déterminée expérimentalement. Les

24 *Jacques André*




```
\e{
402 276 moveto                       % départ point 1
399 380 334 458 226 458 curveto      % courbe de 1 à 2
102 458 22 356 22 214 curveto        % courbe de 2 à 3
22 95 97 -10 212 -10 curveto         % courbe de 3 à 4
312 -10 390 68 421 158 curveto       % courbe de 4 à 5
405 164 lineto                       % droite de 5 à 6
374 109 319 57 253 57 curveto        % courbe de 6 à 7
140 57 92 181 91 276 curveto         % courbe de 7 à 8
closepath                            % fermer contour extérieur
94 308 moveto                        % départ au point 9
103 372 134 424 204 423 curveto      % courbe de 9 à 10
270 423 297 366 300 308 curveto      % courbe de 10 à 11
closepath} def                       % fermer contour intérieur
```

FIGURE 15 – *Un caractère est défini par quelques points de contrôle et tangentes. En haut, le schéma d'un « e » ; en bas, le programme PostScript le décrivant.*

FIG. 5: Extrait de *Caractères numériques : introduction*, de Jacques André

hélices d'avions, les coques de bateaux et les carrosseries de voitures étaient tracées à main levée, sans que l'on puisse décrire leurs formes par une formule mathématique.

Pierre Bézier, ingénieur français diplômé du Conservatoire national des arts et métiers, poursuivait, une carrière à la Régie Renault, atteignant le poste de directeur des méthodes mécaniques.

Les machines à commande numérique de cette époque offraient une programmation limitée. Il fallait les alimenter avec des nombres, ce que l'on savait faire pour des déplacements élémentaires comme des droites, des arcs de cercle, et à la rigueur des ellipses. Mais il n'était pas question de programmer des courbes quelconques, tracées à la main, faute d'une définition numérique de celles-ci. Pierre Bézier chercha donc comment traduire mathématiquement une courbe, puis une surface, dessinées à main levée. Il lui fallait concevoir un système capable de gérer des courbes gauches, c'est-à-dire de manipuler des surfaces en 3D, d'où la nécessité de définir un modèle mathématique qui ne soit pas limité à des courbes en deux dimensions. Enfin, l'ingénieur entendait inventer un système complet pour créer un objet en volume à partir d'un dessin, le tout avec une rapidité d'exécution suffisante, et compréhensible intuitivement.

Mais ses recherches n'étaient pas entièrement originales. Dès 1958, un mathématicien employé par Citroen, Paul de Casteljau, s'était attaqué au même problème. Paul de Casteljau était chargé de numériser une courbe, une fois celle-ci tracée, sans se poser la question d'une correction a posteriori. Il définissait ses courbes comme caractérisées par des pôles, d'une façon nettement moins parlante que les points de contrôle de Bézier.

L'aventure de Pierre Bézier aurait pu s'arrêter là. Mais un groupe de développeurs liés à Apple créa un langage adapté à la future imprimante laser conçue pour le Mac. Il s'agissait de trouver un moyen de définir mathématiquement une courbe, comme le tracé d'un caractère, avant de l'envoyer à l'imprimante. L'un de ces développeurs connaissait le travail du Français. Tout naturellement, il choisit les courbes de Bézier comme base du langage PostScript et fonda la société Adobe. Microsoft adopta à son tour les polices true-type à partir de Windows 3.1. Ces polices utilisent les courbes de Bézier pour définir les caractères aux formes arrondies.

I. Définition des courbes de Bézier

On se donne quatre points A_0, A_1, A_2, A_3 dans le plan, et on cherche à définir une courbe paramétrée

– qui part de A_0 et arrive en A_3 ;
– qui est tangente en A_0 à la droite (A_0A_1),
– qui est tangente en A_3 à la droite (A_2A_3),
– qui est définie par des polynômes de petit degré.

Pour cela, on définit les quatre polynômes (dits *polynômes de Bernstein* de degré 3)

$$p_0(t) = (1-t)^3, \quad p_1(t) = 3t(1-t)^2, \quad p_2(t) = 3t^2(1-t), \quad p_3(t) = t^3.$$

Soit α la courbe paramétrée définie, pour $t \in [0,1]$, par les formules suivantes, où $A_0 = (x_0, y_0)$, *etc.*.

$$\begin{cases} x(t) &= x_0p_0(t) + x_1p_1(t) + x_2p_2(t) + x_3p_3(t) \\ y(t) &= y_0p_0(t) + y_1p_1(t) + y_2p_2(t) + y_3p_3(t) \end{cases}$$

Question 1. Cas particulier

On considère ici les points $A_0 = (0,0), A_1 = (0,1), A_2 = (1,1), A_3 = (1,0)$. Dans ce cas, expliciter les formules définissant la courbe α. Étudier et dessiner la courbe.

Question 2. Cas général

On considère ici quatre points quelconques A_0, A_1, A_2, A_3.

a. Montrer que la courbe α définie plus haut répond au problème.

On l'appellera *courbe de Bézier associée aux quatre points* $A_0, \dots, A_3$. On pourra faire le calcul à l'aide du tableau suivant.

$p_0(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$x(t)$	$y(t)$
$p_0(0) =$	$p_1(0) =$	$p_2(0) =$	$p_3(0) =$	$x(0) =$	$y(0) =$
$p_0(1) =$	$p_1(1) =$	$p_2(1) =$	$p_3(1) =$	$x(1) =$	$y(1) =$
$p_0'(0) =$	$p_1'(0) =$	$p_2'(0) =$	$p_3'(0) =$	$x'(0) =$	$y'(0) =$
$p_0'(1) =$	$p_1'(1) =$	$p_2'(1) =$	$p_3'(1) =$	$x'(1) =$	$y'(1) =$

b. Que vaut le vecteur $\alpha'(0)$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{A_0A_1}$? et $\alpha'(1)$ en fonction de $\overrightarrow{A_2A_3}$?

Question 3.

Calculer la vitesse de α au point $t = 1/2$, et exprimer cette vitesse à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{A_0A_3}$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$.

II. Tracé récursif d'une courbe de Bézier : l'algorithme de Casteljau

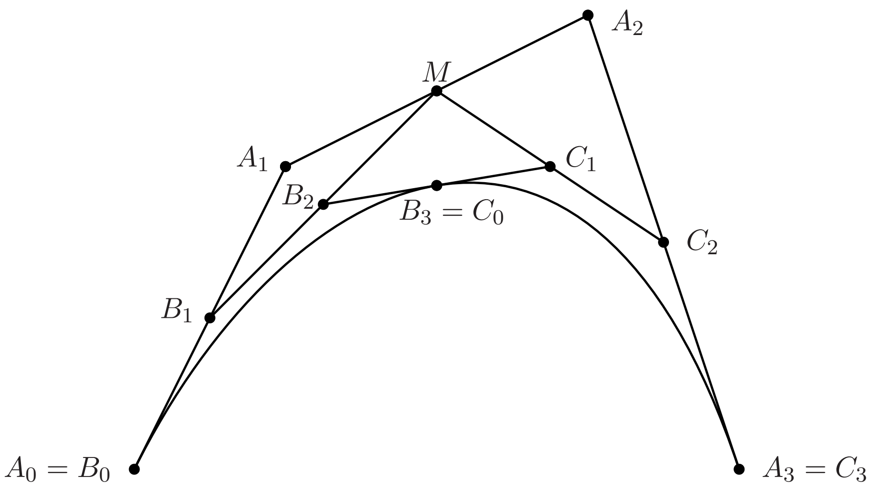


FIG. 6: Construction de Casteljau

Description géométrique de l'algorithme À partir des quatre points A_0, A_1, A_2, A_3, on construit les points B_0, B_1, B_2, B_3 et C_0, C_1, C_2, C_3 en prenant des milieux successifs comme sur le dessin de la figure 6 : $B_0 = A_0$; B_1 est le milieu des points A_0 et A_1 ; B_2 est le milieu de B_1 et du milieu de A_1 et A_2 ; *etc.*.

La remarque de Paul de Casteljau[23] est la suivante : *la courbe de Bézier α associée aux quatres points $A_0, \dots, A_3$ s'obtient en concaténant*[24] *la courbe de Bézier associée à $B_0, \dots, B_3$ et la courbe de Bézier associée à $C_0, \dots, C_3$.* Nous allons essayer de vérifier cette remarque.

[23] Mathématicien, embauché à la fin des années 1950 par Citroën pour trouver une méthode permettant de définir numériquement les courbes dessinées par le bureau d'étude, afin d'assurer une transmission précise à l'atelier de fabrication. Il est le co-inventeur des courbes de Bézier et de leur application à l'automobile.

[24] Concaténer, c'est mettre bout-à-bout.

Question 1.

a. Trouver les coordonnées du point B_3 en fonction de celles des quatres points initiaux $A_0, \dots, A_3$.

b. Montrer que ce point appartient bien à l'image de la courbe α.

Question 2.

Soit $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée obtenue en partant de $\alpha(0)$ à $t = 0$ et en parcourant l'image de la courbe α deux fois moins rapidement.

a. Donner une formule pour la courbe β en fonction de la courbe α. *Aide : que vaut $\beta(1)$? $\beta(1/2)$? $\beta(t)$?*

b. En déduire $\beta'(0)$ et $\beta'(1)$.

c. Montrer que la courbe β vérifie bien les propriétés de la courbe de Bézier associée à $B_0, \dots, B_3$ (voir l'exercice précédent) :

$$\beta(0) = B_0, \quad \beta(1) = B_3 \quad \beta'(0) = 3.\overrightarrow{B_0B_1} \quad \beta'(1) = 3.\overrightarrow{B_2B_3}.$$

Question 3.

(optionnelle) De même, donner une formule pour la courbe paramétrée $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ qui part de $\alpha(1/2)$ au temps $t = 0$ et arrive en $\alpha(1)$ à $t = 1$ en parcourant α deux fois moins rapidement. *On montrerait comme avant que γ vérifie les propriétés de la courbe de Bézier associée à $C_0, \dots, C_3$. On admet que β et γ sont bien des courbes de Bézier.*[25]

Question 4.

On considère à nouveau la courbe de Bézier associée aux quatre points $A_0 = (0,0), A_1 = (0,1), A_2 = (1,1), A_3 = (1,0)$. En utilisant la remarque de Casteljau (et non pas la formule définissant α), déterminer les coordonnés du point $\alpha(1/2)$. De même, déterminer les points $\alpha(1/4)$ et $\alpha(3/4)$.

Question 5.

On choisit 4 points quelconques A'_0, A'_1, A'_2, A'_3 dans le plan. On voudrait tracer la courbe de Bézier correspondante α. En utilisant la construction géométrique donnée par l'algorithme de Casteljau, placer les points $\alpha(1/2)$, puis $\alpha(1/4)$ et $\alpha(3/4)$, puis encore quatre autres points. Esquisser le tracé de la courbe α.

I.27. Intérêts composés

[25] Pour montrer ceci, on utiliserait le fait que si l'on se donne quatre nombres x_0, x'_0, x_1, x'_1, il existe un unique polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 tel que $p(0) = x_0, p'(0) = x'_0, p(1) = x_1, p'(1) = x'_1$.

©2001 Arnaud Chéritat (copyleft LDL : Licence pour Documents Libres).
Source: `interets.tex`.
Version imprimable: `interets.pdf`
Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Suites*

Objectifs et commentaires. *L'exercice fait intervenir une suite arithmo-géométrique, ainsi que l'inégalité $(1+x)^{12} > 1+12x$ quand $x > 0$ dans la question 4. La question 3 est vague : on peut par exemple dire qu'une dette dont les intérêts s'accumulent ($a = 0$) forme une suite géométrique, et que τ' est l'unique taux mensuel donnant la même dette au bout de 12 mois que le taux annuel τ au bout d'un an.*

Au Crédit Exponentiel, on prète l'argent au taux annuel τ. Plus précisément, chaque année, l'emprunteur paye à sa banque la somme de $i = \tau E$ (intérêt) où E est la somme qu'il lui reste à rembourser sur son emprunt. L'intérêt représente le coût de l'emprunt, et ne sert pas à rembourser l'emprunt : le remboursement annuel r s'ajoute à i pour former ce que l'on appelle l'annuité a.

Un usager a décidé d'emprunter la somme S, et de la rembourser par la méthode dite des intérêts composés sur N ans. Il va verser à sa banque chaque année pendant N ans la même annuité a.

Question 1.

Calculer l'annuité en fonction de S, τ et N.

Question 2.

Calculer le coût de l'emprunt.

La banque voudrait passer de remboursements annuels à des remboursements mesuels. Pour cela, elle propose de remplacer le taux d'intérêt annuel τ par le taux mensuel τ' donné par la formule $(1 + \tau')^{12} = 1 + \tau$.

Question 3.

D'où sort cette formule ?

Question 4.

Cela augmente-t-il ou diminue-t-il le coût des intérêts composés ?

I.28. La dérivation vue comme une application linéaire

©2001 Frédéric Le Roux (copyleft LDL : Licence pour Documents Libres).
Source: `derivation.tex`.
Version imprimable: `derivation.pdf`
Angle pédagogique : *Langage. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *L'algèbre linéaire dans les espaces fonctionnels pose de redoutables problèmes aux étudiants. En particulier, celui du type d'objets* *manipulé, parce que les objets ont souvent un double statut (à la fois fonction ET vecteur par exemple). Suggestion : ne pas faire comme si il n'y avait pas de problème, et qu'il suffisait d'appliquer les définitions comme d'habitude...*

On considère la question suivante :

> "Soit E l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions sin et cos. Calculer le déterminant de l'application "dérivation" de E dans E."

a. Préciser la question en relevant toutes les affirmations implicites ou ambigües[26], et rédiger un énoncé d'exercice détaillé.

b. Montrer les affirmations implicites.

c. Répondre à la question.

d. Donner l'inverse de cette application "dérivation" par deux méthodes différentes.

I.29. La guerre des caramels n'aura pas lieu.

Source: `caramels.tex`.

Version imprimable: `caramels.pdf`

Angle pédagogique : *Ludique. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Dans cet exercice, on résoud d'abord un système linéaire sur les entiers, on en déduit qu'il a une solution unique sur les rationnels, et donc sur $\mathbb{R}$ grâce au déterminant.*

Cet exercice donne un exemple ludique où on peut utiliser le déterminant (sans pouvoir le calculer) pour résoudre un problème concret.

Cet exercice est inspiré par le problème les caramels *d'*Elisabeth Busser *et* Gilles Cohen *paru dans la rubrique* Affaire de logique *du monde du 13 août 2002.*

Question 1. Les caramels de Grand-Mère

Grand-Mère vient de confectionner ses ineffables caramels. Elle les répartit amoureusement en 15 sachets, pour ses 14 petits enfants (7 garçons et 7 filles) et pour son singe savant, Machiavel. Grand-Mère a la vue basse est elle n'est pas sûre d'avoir mis autant de caramels dans chaque paquet.

Machiavel, qui s'ennuie un peu, aimerait se divertir en semant la zizanie entre le clan des garçons et celui des filles. Il sait que les petits enfants sont tellement friands des caramels que si les garçons n'ont pas, au total, exactement le même nombre de caramels que les filles, la bagarre éclatera entre les deux clans. Machiavel se dépêche donc d'aller dans le placard pour choisir son paquet de caramels. Malheureusement pour lui, quel que soit le paquet qu'il choisisse, Grand-Mère pourra toujours attribuer judicieusement les

[26] Par exemple, faudrait-il préciser dans quelle base il faut faire le calcul ?

paquets restants à ses petits enfants afin que la répartition entre le clan des filles et celui des garçons soit équitable.

Question : est-ce que les 15 sachets de caramels contiennent forcément tous le même nombre de caramels ?

Indications. Étudier la parité des nombres de caramels, puis raisonner par récurrence. [27]

Question 2. Les caramels en morceaux

Grand-Mère a encore fait des caramels. Mais cette fois ci, certains caramels se sont brisés. Notons que les caramels de Grand-Mère sont extraordinaires puisque lorsque l'un deux se casse en morceaux, les morceaux résultant sont toujours tous égaux (mais certains caramels se brisent en plus de morceaux de d'autres). Par exemple, Si un caramel se brise en 17 morceaux, chaque morceau fait précisément $1/17$ème de caramel. Grand-Mère, qui a toujours la vue basse, n'a pas reconstitué les caramels, et elle a pu égarer quelques morceaux avant de remplir les quinze sachets pour ses petits enfants et le singe savant. Chaque paquet de caramel se retrouve ainsi avec des caramels et des fractions de caramels.

Machiavel, qui n'a pas changé d'idée, va encore dans le placard. Mais encore une fois, la chance joue contre lui, et quel que soit le paquet qu'il choisisse, il ne pourra pas déclencher la guerre des caramels.

Question : est-ce que les 15 sachets de caramels contiennent forcément tous le même nombre de caramels ?

Indication. Ramener le problème à un problème de caramels entiers.

Question 3. Le caramel liquide

Grand-Mère a cette fois-ci préparé du caramel liquide, et elle remplit 15 fioles pour Machiavel et les 14 petits-enfants. Bien entendu, elle n'est pas sûre d'avoir rempli les fioles de la même quantité de caramel. Et là encore, quelle que soit la fiole choisie par Machiavel, la famille gardera son ambiance paisible.

Question : est-ce que les 15 fioles contiennent forcément toutes la même quantité de caramel ?

Indication. Utiliser la solution du problème des caramels en morceaux pour en déduire quelque-chose sur le déterminant d'un système d'équations.

Question 4. Des caramels aux théorèmes

Reprendre la question 2 et essayer de trouver de trouver un énoncé de théorème — donnant un lien entre les solutions entières et rationnelles d'un système — qu'on pourrait démontrer avec la même méthode.

Même question pour la question 3.

I.30. Lecture de la bande dessinée *Ah ! Les beaux groupes !*

[27]Les paquets ont tous le meme nombre de caramels modulo 2. Si ils sont tous pairs, diviser par 2. Si ils sont tous impairs, retrancher 1. Ce processus ne s'arrete que si tous les nombres de caramels sont nuls.

Source: `ah-les-beaux-groupes.tex`.
Version imprimable: `ah-les-beaux-groupes.pdf`
Angle pédagogique : *Ludique. Groupes, et autres stuctures algébriques*

Objectifs et commentaires. *L'objectif principal était de faire lire la bande dessinée de Ian Stewart, qui constitue une introduction informelle aux groupes. Les étudiants ont eu en parallèle un cours sur les groupes (précédant le début de l'algèbre linéaire).*

Question 1. Lecture

Lire la BD ! *Avertissement :* vers la fin, ça devient (très) difficile, essayez de suivre les idées, on ne vous demande pas de tout comprendre en détail.

Question 2. Les dominos anthragoniens

a. Donner un exemple d'arrangement initial qui ferait perdre Gaston (qui soit différent des exemples de la BD). Expliquer !

b. Même question dans les "règles internationale" avec 5 dominos.

c. Supposons qu'on aie un arrangement A quelconque des dominos. À partir de cet arrangement A, on obtient un deuxième arrangement B en retournant l'un des dominos (rappelons que ceci change la couleur du domino). Montrer que l'un des deux arrangement ferait perdre Gaston, et l'autre le ferait gagner.

Question 3. Isométries du carré

a. Décrire le groupe des isométries du carré : autrement dit, trouver toutes les rotations et symétries du plan qui préservent un carré fixé.*Indication : il y en a 8.*

b. Ces isométries forment un groupe G. Chercher (et si possible trouver !) tous les sous-groupes de G.
Indications :

- Il y en a 10 (en comptant le groupe G lui-même et le sous-groupe qui ne contient que l'identité).
- On sait *a priori* qu'il n'y a pas de sous-groupe de G contenant exactement 3 éléments, pourquoi ? (Chercher dans la BD...) Quels sont les autres nombres interdits pour la même raison ?

I.31. Les 3 phares

Source: `les_3_phares.tex`.

Version imprimable: `les_3_phares.pdf`

Angle pédagogique : *Ludique. Géométrie euclidienne*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Décomposer un problème ; Visualiser un ensemble de points qui satisfait à une certaine condition, faire preuve d'autonomie*

Cet exercice est tiré de La decouverte des mathématiques*, Georges Polya, editions Dunod*

D'un bateau en mer, on peut voir trois phares ; on connait la position de ces phares sur la carte, et l'on mesure l'angle des rayons lumineux qu'ils envoient. Marquer la position du bateau sur la carte.

I.32. Le tapis de Sierpinski

Source: `Tapis-de-Sierpinski.tex`.

Version imprimable: `Tapis-de-Sierpinski.pdf`

Angle pédagogique : *Ludique. Séries*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Cet exercice peut sembler très facile ; néanmoins, on remarque que peu d'étudiants maîtrisent suffisamment les suites géométriques pour penser à utiliser la formule de somme* sans qu'on le leur suggère *(la connaissance est généralement mobilisable mais pas disponible...). Du coup, le comportement de la suite* (S_n) *est rarement justifié (même s'il leur semble "évident" qu'elle doit tendre vers* 0*).*

D'autre part, à la deuxième question, la réponse unanime est que la durée est nécessairement infinie, puisqu'il y a une infinité d'étapes : on retrouve une version du paradoxe de Zénon.

Ceci donne une illustration des deux principaux obstacles à la compréhension des séries : l'intuition suggère parfois qu'une série converge forcément puisqu'on ajoute des termes de plus en plus petits (la convergence est "évidente" dans la première question, ce qu'on retrouve souvent dans les exercices techniques dans la formule "le terme général tend vers 0*, donc la série converge"), ou bien au contraire, une série diverge forcément puisqu'on ajoute une infinité de termes (la variante la plus utilisée dans les exercice est sans doute "la fonction tend vers* $+\infty$ *en* 0 *donc l'intégrale diverge").*

Ainsi, cet exercice peut servir d'introduction aux séries, en invitant les étudiants à réfléchir, après coup, à ces deux obstacles.

Monsieur Sierpinski avait ramené d'un voyage en Orient un tapis carré de 1 mètre de côté dont il était très content. Jusqu'au jour où les mites s'introduisirent chez lui.

En 24 heures, elles dévorèrent dans le tapis un carré de côté trois fois plus petit, situé exactement au centre du tapis. En constatant les dégats, Monsieur Sierpinski entra dans une colère noire ! Puis il se consola en se disant qu'il lui restait huit petits carrés de tapis, chacun de la taille du carré disparu. Malheureusement, dans les 12 heures qui suivirent, les mites avaient attaqué les huit petits carrés restants : dans chacun, elles avaient mangé un carré central encore trois fois plus petit. Et dans les 6 heures suivantes elles grignotèrent encore le carré central de chacun des tout petits carrés restants. Et l'histoire se répéta, encore et encore ; à chaque étape, qui se déroulait dans un intervalle de temps deux fois plus petit que l'étape précédente, les mites faisaient des trous de taille trois fois plus petite...

Question 1.

Faire des dessins pour bien comprendre la géométrie du tapis troué. Calculer le nombre total de trous dans le tapis de Monsieur Sierpinski après n étapes. Calculer la surface S_n de tapis qui n'a pas encore été mangée après n étapes. Trouver la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$. Que reste-t-il du tapis à la fin de l'histoire ?

Question 2.

Calculer la durée totale du festin "mitique"...

I.33. Ordonner les nombres complexes

Source: `ordre_complexe.tex`.

Version imprimable: `ordre_complexe.pdf`

Angle pédagogique : *Méta-mathématiques. Théorie des ensembles, et structures de base*

Objectifs et commentaires. *Il s'agit ici de faire comprendre aux étudiants pourquoi* on n'a pas le droit *de comparer deux nombres complexes. Il faut sans doute s'attendre à ce que certains pensent qu'il n'existe pas d'ordre total sur* $\mathbb{C}$ *du tout.*

Considérons un ordre total $\prec$ sur $\mathbb{C}$. Disons qu'un tel ordre est *raisonnable* si on a les deux propriétés suivantes :

- si $a \prec b$, alors $a + c \prec b + c$
- si $a \prec b$ et $c \succ 0$, alors $ac \prec bc$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il n'existe pas d'ordre raisonnable sur $\mathbb{C}$.

a. Existe-t-il un ordre total sur $\mathbb{C}$?
Supposons maintenant que $\prec$ soit un ordre raisonnable. On veut aboutir à une contradiction.

b. Démontrer que si $x \succ 0$, alors $-x \prec 0$.

c. Démontrer que si $x \succ 0$ alors $x^2 \succ 0$.

d. Démontrer que si $x \prec 0$ alors $x^2 \succ 0$.

e. Déduire des questions précédentes que $1 \succ 0$, et en déduire à la fois que $-1 \prec 0$, et $-1 \succ 0$, ce qui est impossible.

I.34. Parachutiste

Source: `parachutiste.tex`.

Version imprimable: `parachutiste.pdf`

Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Équations différentielles*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice montre une équation différentielle simple dans un cadre très concret.*

Difficulté inattendue : en TD, un certain nombre d'étudiants ont été génés par le fait d'interprêter z' comme une vitesse : comment une vitesse peut-elle être négative ? Il est aussi assez peu satisfaisant de donner brutalement l'équation différentielle (les étudiants ont besoin de se l'approprier), sachant que demander aux étudiants de la retrouver demande forcément du temps... Un compromis pourrait être de ne donner l'équation différentielle qu'au signe près *(par exemple $mz'' = \pm kz' \pm mg$) et de laisser les étudiants trouver les bons signes.*

Autre difficulté inattendue : on ne donne pas l'altitude initiale z_0. Peut-on quand même trouver la distance parcourue ? Doit-on poser $z_0 = 0$?

Les valeurs numériques ne sont sans doute qu'approximativement réalistes.

On souhaite étudier le saut d'un parachutiste. Un parachutiste de masse m en chute libre est soumis à la force de la pesanteur mg et à une force de frottement proportionnelle à la vitesse. On note $z(t)$ l'altitude du parachutiste en fonction du temps. $z(t)$ est alors décrit par l'équation différentielle suivante :

$$mz'' = -kz' - mg$$

On utilisera les valeurs numériques suivantes : $g = 10$ ms^{-2}, $m = 70$ kg et $k = 7$ kgs^{-1}.

1. Déterminer la vitesse limite théorique du parachutiste. Sachant que le parachutiste quitte l'avion à vitesse nulle, déterminer le temps mis pour atteindre 90% de cette vitesse limite ainsi que la distance parcourue pendant ce temps. Même question avec 99% de la vitesse limite.
2. Lorsque le parachutiste ouvre son parachute, le coefficient de frottement est multiplié par 20. Il doit arriver au sol avec une vitesse inférieure à 6 ms^{-1}. En supposant qu'il chute à la vitesse limite au moment de l'ouverture du parachute, déterminer l'altitude maximale d'ouverture du parachute (le parachute met 2 secondes à se déployer).

I.35. Parties d'un ensemble et procédé diagonal

Source: `parties_et_procede_diagonal.tex`.

Version imprimable: `parties_et_procede_diagonal.pdf`

Angle pédagogique : *Langage. Théorie des ensembles, et structures de base*

Objectifs et commentaires. *L'exercice commence par introduire le codage des parties d'un ensemble par leur fonction caractéristique, puis leur montre le procédé diagonal de Cantor. L'exercice fait manipuler aux étudiants les notions de bijections, injections, applications, complémentaire.*

C'est volontairement qu'on parle d'ensemble quelconque (sans preciser que cela signifie fini ou infini), et c'est la derniere question qui doit leur faire realiser que la *construction marche aussi pour un ensemble infini. On peut alors les faire réfléchir sur l'existence d'infinis plus grand que d'autres...*

Question 1. Codage des parties d'un ensemble fini

Dans tout l'exercice, on notera $B = \{0, 1\}$ (*ensemble des "bits"*).

Soit $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble à n éléments ($n \geq 1$). À toute partie A de E, on associe son *application caractéristique* :

$$\chi_A \; : \begin{cases} E \to B \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{cases}$$

On peut coder l'application χ_A par un *vecteur de bits* ("bit vector") $V_A = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, où $\epsilon_i = \chi_A(a_i)$. Autrement dit, le i-ème bit ϵ_i est mis à 1 si a_i est élément de A, sinon, il est mis à 0 [28].

a. On prend ici $n = 3$ et $E = \{1, 2, 3\}$. Enumérer toutes les parties de E. Pour chacune, expliciter son application caractéristique ainsi que le vecteur de bits associé. On présentera les résultats sous forme de tableau.

b.

(i). — On se replace dans le cas général (n quelconque). Montrer que l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}(E, B)$ qui à une partie A de E associe sa fonction caractéristique χ_A est bijective. Pour cela, on explicitera son application réciproque.

(ii). — Montrer de même que l'application $\mathcal{P}(E)$ dans B^n qui à une partie A de E associe son vecteur de bits V_A est bijective.

La bijectivit'e de cette application a-t-elle un intérêt, en termes du codage mentionné au dessus ?

(iii). — En déduire le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

c.

(i). — On note $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$ (*bit complémentaire*) ; autrement dit, $\forall \epsilon \in B$, $\overline{\epsilon} = 1 - \epsilon$. Pour tout vecteur de bits $V = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in B^n$, on note $\overline{V} = (\overline{\epsilon_1}, \ldots, \overline{\epsilon_n})$. A quelle partie de E correspond le vecteur de bits $\overline{V_A}$?

(ii). — Décrire de même le vecteur de bits associé à $A \cup A'$, à $A \cap A'$.

Question 2. Le procédé diagonal de Cantor

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $2^n > n$. En déduire que, pour tout ensemble fini E, il n'existe aucune application surjective de E sur $\mathcal{P}(E)$.

[28] C'est la méthode utilisée dans le langage Pascal (par exemple) pour coder le type de données *ensemble*.

b. On prend maintenant $E = \{1, \ldots, n\}$. On considère n parties de E, notées $A_1, \ldots, A_n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $V_{A_i} = (\epsilon_{i,1}, \ldots, \epsilon_{i,n})$ le vecteur de bits associé. Puis, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\epsilon'_i = \overline{\epsilon_{i,i}}$. On note enfin $V' = (\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n)$ et A' l'unique partie de E dont le vecteur de bits associé est V'.

(i). — Donner un exemple de ces constructions, sous forme de tableau, lorsque $n = 10$.

(ii). — En général, montrer que A' n'est égal à aucune des parties A_i. On raisonnera par l'absurde : si l'on avait $A' = A_i$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, n\}$, quelle serait la valeur du i-ème bit du vecteur associé à cette partie ?

(iii). — Retrouver ainsi le résultat de la question a. Indication : si f est une application de E dans $\mathcal{P}(E)$, on note $A_1 = f(1), \ldots, A_n = f(n)$; on constate alors que la partie A' construite ci-dessus n'appartient pas à l'ensemble image de f.

(iv). — Vérifier que $A' = \{i \in E \ / \ i \notin A_i\}$.

c. On s'inspire ici de la question b pour démontrer le théorème suivant : E étant un ensemble *quelconque*, il n'existe aucune application surjective de E sur $\mathcal{P}(E)$. Supposons donc que f est une application de E dans $\mathcal{P}(E)$. Posons :

$$A' = \{x \in E \ / \ x \notin f(x)\}.$$

(i). — Vérifier que cette définition a bien un sens.

(ii). — Montrer qu'il n'existe aucun élément x de E tel que $A' = f(x)$. On raisonnera par l'absurde : si l'on avait $A' = f(x)$, aurait-on $x \in A'$ ou $x \notin A'$?

(iii). — Conclure.

(iv). — Pourquoi, dans l'énoncé du théorème, a-t-on précisé que l'ensemble E était "quelconque" ?

I.36. Passage au quotient pour une application

Source: `passage_au_quotient.tex`.

Version imprimable: `passage_au_quotient.pdf`

Angle pédagogique : *Langage. Théorie des ensembles, et structures de base*

Objectifs et commentaires. *Le but de l'exercice est d'introduire le passage au quotient d'une application dans la situation la plus simple possible : la parité dans $\mathbb{Z}$. Il est en particulier important de donner un exemple d'application qui ne passe PAS au quotient (dernière question).*

On définit une relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \ : \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ ont même parité}$$

(autrement dit, ils sont tous deux pairs ou tous deux impairs).

a. Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

b. On note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de l'entier x et $\overline{\mathbb{Z}}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par $\mathcal{R}$ (donc, l'ensemble des classes d'équivalence).

Combien y a-t-il de classes d'équivalence différentes ?

c. Soient a, b, c des entiers, et soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. On veut essayer de donner un sens a cette fonction dans $\overline{\mathbb{Z}}$, c'est à dire définir une fonction $\overline{f}(\overline{x})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}$ telle que $y = f(x)$, alors $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$.

(i). — Montrer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ pair.

(ii). — Soient a, b, c des entiers, et soit $f(x) = ax^2+bx+c$. En factorisant $f(x)-f(y)$, démontrer l'implication :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \ : \ x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x)\mathcal{R}f(y).$$

(iii). — Comment peut-on alors définir $\overline{f}$?

d. Montrer qu'il existe une application g de $\mathbb{Z}$ dans lui-même qui, à un entier x, associe $g(x) = \frac{x^2+x}{2}$. Est-il possible de définir d'une application $\overline{g} : \overline{\mathbb{Z}} \to \overline{\mathbb{Z}}$ telle que, si $y = g(x)$, alors $\overline{y} = \overline{g}(\overline{x})$?

I.37. Plusieurs questions sur un système.

Source: `questions-systeme.tex`.

Version imprimable: `questions-systeme.pdf`

Angle pédagogique : *Méta-mathématiques. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Le but de cet exercice, est de mettre en évidence le fait qu'il y a* plusieurs *questions à se poser sur un système d'équations à part sa résolution.*

Lorsqu'on a un système d'équations, il n'y a pas que sa résolution qui est intéressante. On peut se poser d'autres questions : est-ce que le système admet au moins une solution ? Est-ce qu'il en admet une unique ?

a. On considère le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z+t & = & a \\ x-y-z-t & = & b \\ -x-y\ +t & = & c \\ -3x+y-3z-7t & = & d \end{array}\right.$$

1. A quelle condition (S) admet-il une solution ?
2. Montrer que si $a, b, c, d > 0$ alors (S) n'a pas de solution.
3. Quel est l'ensemble des solutions du système homogène associé ?

b. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(X) = A.X$.

1. Calculer $f(X)$. Montrer que f est linéaire.
2. Quelle est sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?
3. f est-elle surjective ? injective ? Trouver l'image et le noyau de f.
4. f est-elle inversible ?
5. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'image de f ? au noyau de f ?

c.

1. Le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient-il à l'espace vectoriel engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$?
2. Ces 4 vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

I.38. Puissances des racines 90èmes de l'unité

Source: `racines-90.tex`.

Version imprimable: `racines-90.pdf`

Angle pédagogique : *Expérimental. Nombres complexes*

Objectifs et commentaires. *Savoir expérimenter pour découvrir une formule ; un peu de théorie des groupes sans le dire...*

Expérience : un étudiant motivé peut trouver la formule ; la preuve est beaucoup plus délicate.

Soit z un nombre complexe qui est une racine 90ème de l'unité. On considère toutes les puissances positives de z :

$$z^0, z^1, z^2, z^3, \ldots$$

Combien obtient-on ainsi de nombres complexes distincts ?

Autrement dit, quel est le cardinal de l'ensemble

$$G_z = \{z^k | k \in \mathbb{N}\} \quad ?$$

Suggestion Expérimentez !

I.39. Quelqu'un aurait-il vu passer un polynôme ?

Sources et figures: `polynome-lagrange/`.

Version imprimable: `polynome-lagrange.pdf`

Angle pédagogique : *Expérimental. Polynômes*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice a été proposé en travail en groupe de quatre. La plupart des étudiants, avec un peu de temps, arrivent à trouver un énoncé satisfaisant (existence et unicité avec la condition de degré). Le plaisir d'avoir fabriquer un théorème les a marqué.*

Il est assez rejouissant de voir des étudiants trouver également eux-même la formule d'interpolation, alors qu'il y a souvent un blocage quand on la leur donne d'emblée. Notons que la preuve de l'unicité est très difficile à trouver pour eux (bien que très courte).

I. Introduction

Tous les logiciels de dessin assisté par ordinateur, possède une fonction de tracé de courbe passant par des points spécifiés : avec la souris, on marque un certain nombre de points sur l'écran, et l'ordinateur se charge de trouver une courbe qui passe par ces points. Quitte à utiliser assez de points, on peut ainsi tracer n'importe quel contour.

Comment l'ordinateur fait-il pour trouver une courbe qui passe par des points donnés ? En fait, en général, il cherche un polynôme dont le graphe passe par ces points (une fois un tel polynôme trouvé, l'ordinateur n'a aucun mal à tracer son graphe). Mais un tel polynôme existe-t-il toujours ? Si oui, comment l'ordinateur fait-il pour le trouver ?

II. Énoncé

On est donc confronté au problème mathématique suivant : *si on se donne un certain nombre de points dans le plan $\mathbb{R}^2$, existe-t-il des polynômes dont le graphe passe par ces points ? en existe-t-il un seul ? sinon, en existe-t-il un plus simple que les autres ? quand il en existe un, peut-on trouver une formule le donnant ?*

On vous demande d'essayer de "fabriquer" un énoncé de théorème qui réponde à toutes ces question. Bien sûr, pour cerner l'énoncé le plus précis et le plus "joli" possible, il faut commencer par "expérimenter". Voici quelques pistes de recherche (avec l'idée : quand un problème est trop difficile, *il faut essayer de le simplifier*, par exemple en commençant par des cas particuliers...) :

– Avez-vous une idée intuitive de la réponse ?
– Essayer avec 2 points. Comment peut-on formuler le résultat dans ce cas-là ? Essayer de donner le “meilleur” énoncé possible.
– Que dire si tous les points sont situés sur l’axe des abscisses (par exemple avec trois ou quatre points) ?
– Que dire si tous les points *sauf un* sont sur l’axe des abscisses ? Si tous les points *sauf deux* sont sur l’axe des abscisses ?...

III. Bilan

Rappelons qu’étant donné un nombre fini de points dans le plan, on cherche à répondre aux questions suivantes : existe-t-il toujours un polynôme dont le graphe passe par ces points ? ce polynôme est-il unique ? en existe-t-il un qui soit “plus simple que les autres” ? peut-on trouver une formule définissant ce polynôme ?

La réponse à toutes ces questions est résumée par le théorème suivant.

Théorème *Soient $M_1, \ldots, M_n$ des points deux à deux distincts dans $\mathbb{R}^2$. Notons $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ les coordonnées de ces points, et supposons que les abscisses $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distinctes. Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ dont le graphe passe par les points $M_1, \ldots, M_n$; ce polynôme est donné par la formule suivante :*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

La formule ci-dessus a été découverte par le mathématicien Joseph Louis Lagrange (voir sa biographie à la fin du texte) ; on parle du “polynôme de Lagrange associé aux points $M_1, \ldots, M_n$”. Notons que le théorème 1 est un résultat très satisfaisant : c’est un résultat d’existence et d’unicité, le degré du polynôme ne croit pas très vite en fonction du nombre de points, et on a une formule très facile à rentrer dans un ordinateur si on souhaite faire des calculs explicites. Remarquons par ailleurs que ce résultat est optimal, au sens où :

– l’hypothèse sur les abscisses des points $M_1, \ldots, M_n$ est nécessaire ; en effet, si ces abscisses ne sont pas deux à deux distinctes, alors il ne passe aucun graphe de fonction par les points $M_1, \ldots, M_n$; en particulier, il ne passe aucun graphe de polynôme ;
– le polynôme exhibé dans l’énoncé ci-dessus est de degré minimal ; en effet, sauf si les points $M_1, \ldots, M_n$ sont disposés de façon spéciale, il n’existe aucun polynôme de degré strictement inférieur à $n-1$ dont le graphe passe par les points $M_1, \ldots, M_n$;
– dès que d est supérieur ou égal à n, il existe une infinité de polynômes de degré d dont les graphes passent par les points $M_1, \ldots, M_n$.

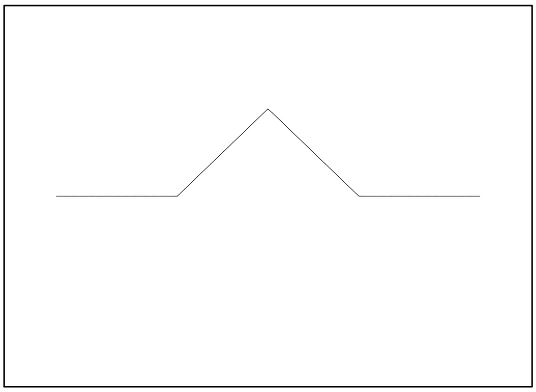
Revenons maintenant à la question du tracé de courbes dans les logiciels de DAO (dessin assisté par ordinateur). Rappelons de quoi il s’agit : pour dessiner un objet, les logiciels de DAO proposent habituellement à l’utilisateur de placer avec la souris un certain nombre de points par lesquels doit passer le contour de l’objet à dessiner ; l’ordinateur se charge alors de trouver une courbe qui passe par ces points. Mathématiquement, une courbe est une application de l'intervalle $[0, 1]$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. On peut chercher une courbe polynômiale, c'est-à-dire sous la forme

$$t \longmapsto (P(t), Q(t))$$

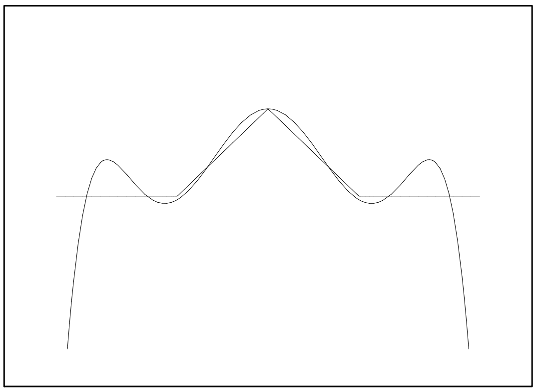
où P et Q sont des polynômes.

Les polynômes de Lagrange fournissent en théorie une solution à ce problème. Néanmoins, ces polynômes ne sont jamais utilisés tels quels par les logiciels de dessin. Ceci est dû au phénomène décrit ci-dessous.

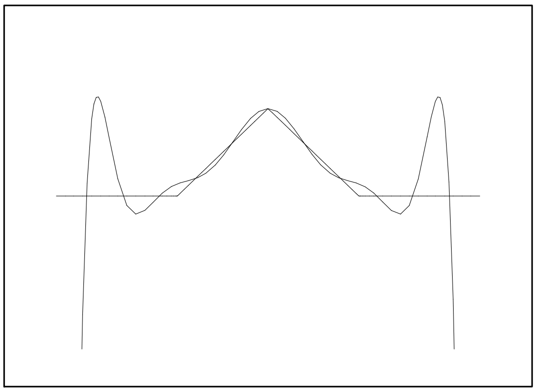
Supposons qu'on veuille tracer un contour ayant la forme suivante :



On place 7 points régulièrement répartis sur ce contour, et on trace le polynôme de Lagrange associés à ces points. On obtient ceci :



Le graphe du polynôme de Lagrange approche assez bien le contour souhaité dans la zone situé vers le milieu de la fenêtre, mais pas très bien sur les côtés. Il devrait suffir de rajouter des points... Avec 10 points ; on obtient ceci :



Hélas, ca ne s'arrange pas ! En fait, ça a même tendance à empirer : sur les côtés, le graphe du polynôme de Lagrange s'éloigne du contour souhaité. Ce phénomène s'appelle *phénomène de Runge*. On peut vérifier qu'augmenter le nombre de points ne fait qu'accentuer le phénomène. On est en fait confronté au problème suivant : *même si deux courbes ont beaucoup de points en commun, ces courbes ne sont pas nécessairement proches (entre deux points communs successifs, les courbes peuvent s'éloigner beaucoup l'une de l'autre).* Les solutions trouvées dans les logiciels de dessins sont de deux types :

- faire des "polynômes de Lagrange" par morceaux : si on cherche une fonction dont le graphe passe par les points $M_1, \ldots, M_n$, on peut considérer le polynôme de Lagrange P_1 associé aux points M_1, M_2, M_3, le polynôme de Lagrange P_2 associé aux points M_2, M_3, M_4, le polynôme de Lagrange P_3 associé aux points M_3, M_4, M_5, etc., puis faire une sorte de combinaison de ces polynômes pour trouver une fonction dont le graphe passe par tous les points $M_1, \ldots, M_n$. Ceci diminue les effets de bords ;
- utiliser des polynômes dont le graphe ne passe pas exactement par les points spécifiés, mais seulement près de ces points, et qui approche mieux le contour qu'on veut dessiner (en fait, qui approche mieux la ligne brisée joignant les points successifs). On peut alors utiliser une autre famille de polynômes, appelés *polynômes de Tchebychev.*

Bien entendu, Lagrange, qui est mort en 1813, n'a pas inventé les polynômes qui portent son nom pour résoudre des problèmes de dessin sur ordinateur. Le but de Lagrange était de montrer qu'on peut approcher n'importe quelle fonction par une fonction très simple (ici une fonction polynomiale). Cette démarche est à rapprocher de celle du mathématicien et physicien Joseph Fourier (1768-1830) qui a expliqué comment approcher toute fonction par une somme de fonctions sinus et de cosinus. Terminons avec quelques indications sur la vie et l'oeuvre de Lagrange.

IV. Bibliographie

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) est né à Turin, alors capitale du royaume de Sardaigne, dans une famille bourgeoise, mais relativement peu fortunée. Son intérêt pour les mathématiques naît de la lecture des travaux de Halley sur l'utilisation de l'algèbre en optique. Ses premiers travaux mathématiques, portant sur l'application du calcul des variations à la mécanique, lui valent d'être élu membre de l'Académie de Berlin dès l'âge de vingt ans. Il continue cependant à enseigner à Turin jusqu'en 1766, date à laquelle il finit par accepter un poste prestigieux à Berlin. Il passera vingt ans à Berlin, avant de rejoindre Paris où il terminera sa carrière comme Membre de l'Académie des Sciences et professeur d'Analyse à l'École Polytechnique (créée en 1794).

Lagrange est l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Il a apporté une contribution essentielle à des domaines aussi divers que :

– la mécanique (il développe par exemple une théorie perturbative des orbites des planètes qu'il applique pour expliquer certaines caractéristiques de l'orbite de la Lune),
– l'analyse des fonctions (c'est lui qui clarifie les notions de dérivée, et l'énoncé du théorème des accroissements finis),
– l'approximation de fonctions (il introduit à ce propos les "polynômes de Lagrange"),
– la résolution des équations polynomiales (par exemple, il montre que si P est un polynôme à coefficients réels $a_1, \ldots, a_n$, alors la valeur absolue de chaque racine réelle de P est inférieure à $1 + \max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$),
– la théorie des nombres (recherche des solutions entières de certaines équations),...

Note. Vous pouvez trouver des biographies des mathématiciens les plus importants, avec un résumé de leurs contributions mathématiques, sur le site suivant :
http ://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/accueil.htm

I.40. Réfraction de la lumière

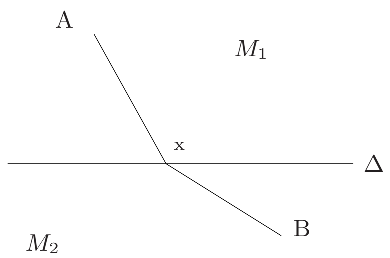
Sources et figures: `refraction_lumiere/`.
Version imprimable: `refraction_lumiere.pdf`
Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Fonctions d'une variable réelle*

Objectifs et commentaires. *Utiliser le savoir-faire mathématique pour une application physique. Choisir un bon système de coordonnées. Mettre en équations une situation physique.*

Cet exercice est tiré de Calculus*, Edward R. Fadell, Albert G. Fadell, editions Van Nostrand Reinhold Compagny*

On considère deux milieux M_1 et M_2 (par exemple, air et eau), séparés par une droite Δ, un point A dans M_1 et un point B dans M_2. On veut déterminer la trajectoire d'un rayon lumineux allant de A à B. Les hypothèses sont que la lumière se propage à la vitesse v_1 dans M_1 et à la vitesse v_2 dans M_2.

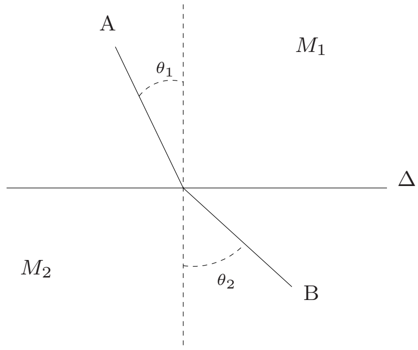
a. Soit x un point de la droite Δ. Calculer en fonction de x la durée d'un trajet $Ax + xB$.



b. Le trajet réel emprunté par la lumière est celui dont la durée est la plus courte (principe de Fermat). Calculer ce trajet et retrouver la loi de Snell

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2}$$

où θ_1 est l'angle entre Ax et la perpendiculaire à Δ et θ_2 l'angle entre Bx et la perpendiculaire à Δ.



I.41. Rotations du plan : géométrie et algèbre linéaire.

Source: `Rotations-du-plan.tex`.

Version imprimable: `Rotations-du-plan.pdf`

Angle pédagogique : *Visualisation. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *L'objectif principal est de donner un peu de sens géométrique à quelques notions d'algèbre linéaire (matrice d'une application, inverse, changement de bases, vecteur propre, racine carré). D'autre part, il est indispensable que les étudiants aient des exemples d'applications linéaires présent à l'esprit pour tester et visualiser les notions abstraites introduites dans le cours. Il serait dommage de ne pas utiliser les rotations, que les étudiants ont déjà rencontrées (il serait dommage aussi de se limiter à ces exemples, qui peuvent être trompeurs, puisque les rotations ont des propriétés bien plus fortes que la simple linéarité).*

Dans la question 1.b, les étudiants ont tendance à dessiner leurs vecteurs issus du centre de la rotation ; autrement dit, ils testent la linéarité de l'application tangente et non pas de la rotation elle-même ! Et au fond, ils ont raison, il est très bizarre de vouloir faire agir une rotation non centrée en 0 sur des vecteurs "issus de 0". Il faut probablement ré-écrire cette question en évoquant la double vie des éléments de $\mathbb{R}^2$, vecteurs et points...

L'exercice complet est long (plusieurs heures), mais découpés en modules assez indépendants.

Le but de cet exercice est d'étudier les rotations du plan, en confrontant le point de vue géométrique au point de vue matriciel.

Pour tout θ réel, on note R_θ la rotation du plan $\mathbb{R}^2$ de centre $O = (0, 0)$ et d'angle θ.

Question 1. Linéarité

a. On prend la rotation d'angle $\theta = \pi/4$. Faites un dessin pour tester, sur quelques vecteurs, la linéarité de cette application.

b. Testez la linéarité de la rotation de même angle, et de centre $(1, 0)$. Conclusion ?
On admet (provisoirement) que les rotations de centre O sont linéaires.

Question 2. Matrices et géométrie

a. Déterminer (géométriquement) la matrice M_θ de R_θ dans la base canonique. Pour $\theta = \pi/4$, déterminer géométriquement l'image du vecteur $(1, 1)$; puis retrouvez le résultat matriciellement.

b. On raisonne géométriquement : décrire l'application composée $R_\theta \circ R_{\theta'}$. En déduire, sans calcul, la matrice de cette application.

c. On raisonne matriciellement : retrouvez par le calcul la matrice précédente.

d. À partir de ce qui précède, expliquer une façon simple de retrouver certaines formules trigonométriques, si on les a oubliées.

Question 3. (optionnelle) Rotations réciproques

Quelle est l'application réciproque de la rotation R_θ, et que vaut sa matrice ? comme à la question précédente, donner un argument géométrique, puis un argument matriciel.

Question 4. Changement de bases

a. On prend $\theta = \pi/2$. Donner la matrice de $R_{\frac{\pi}{2}}$ dans la base canonique, puis dans la base $((1, 0), (1, 1))$. Ici encore, on pourra raisonner géométriquement, puis matriciellement.

b. (Question plus difficile) Existe-t-il une base dans laquelle $R_{\frac{\pi}{2}}$ a une matrice diagonale ? [*Idée : raisonnez par l'absurde ; comment interpréter géométriquement le fait d'avoir une matrice diagonale dans une certaine base ?...*]

Question 5. Racines carrées

On voudrait savoir combien il y a de *racines carrées* de la matrice Identité, c'est-à-dire de matrices M, de taille 2×2, telles que $M \times M = Id$.

a. On propose d'abord d'envisager la question d'un point de vue purement matriciel. Donnez-vous 5 minutes, et cherchez le plus possible de telles matrices.

b. Donnez la traduction géométrique du problème (*i.e.* donnez un problème logiquement équivalent mais concernant les applications linéaires). Trouvez maintenant d'autres racines carrées de l'identité ! [Indication : quelles applications linéaires du plan connaissez-vous en plus des rotations ?...] Rappelez-vous que la question de départ était matricielle, on souhaite donc obtenir une réponse en terme de matrices (même si la méthode utilisée est géométrique).

c. Trouvez, de la même manière, des racines carrées de la matrice $-Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 6. Retour sur la linéarité

Montrer que les rotations R_θ sont linéaires. [*Idée : il suffit d'écrire la formule donnant les coordonnées de* $R_\theta(x, y)$*, où* (x, y) *est un point quelconque du plan. C'est plus facile avec les nombres complexes...*]

I.42. Ski de fond et fonctions de plusieurs variables

Frédéric Pham, Matthieu Romagny. (Cet exercice n'est pas sous copyleft LDL)

Sources et figures: `skieur/`.

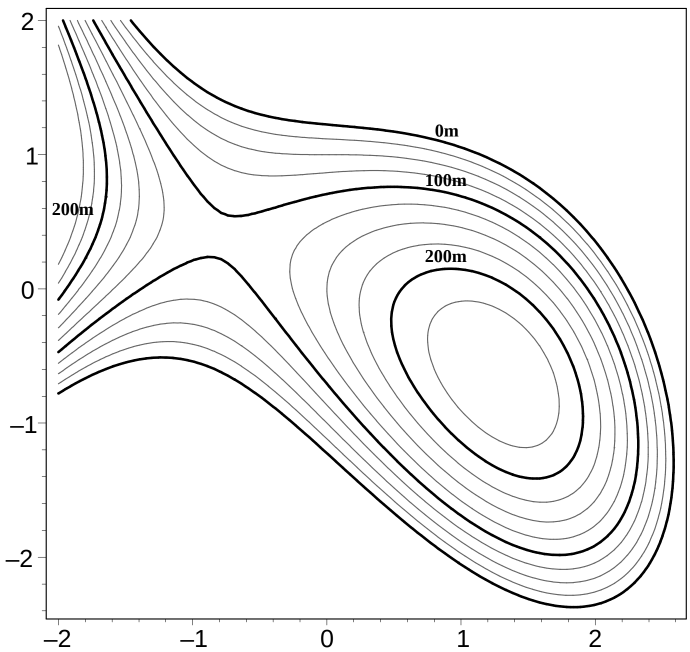
Version imprimable: `skieur.pdf`

Angle pédagogique : *Expérimental. Fonctions de plusieurs variables réelles*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice a été créé par Frédéric Pham dans sa presque totalité (sauf dernière question : calcul du plan tangent due à Matthieu Romagny). Il est extrait de son ouvrage* "Fonctions d'une ou deux variables" *à paraître aux éditions Dunod.*

Commentaires de Matthieu Romagny. *Le but de l'exercice est d'amener les étudiants à apprivoiser les fonctions de plusieurs variables, tout d'abord en utilisant des dessins et l'intuition, puis en menant les calculs correspondants. Le support — lignes de niveau d'une carte IGN — a l'avantage d'être certainement déjà bien connu de beaucoup ! Remarque : lorsque j'ai proposé cet exercice en TD, en début de DEUG1, il fallait compter plus d'une séance pour le mener à bout (environ 3 heures).*

La figure ci-dessous est une carte du relief d'une presqu'île : le contour extérieur est la ligne de niveau 0 (bord de mer). L'équidistance des lignes de niveau est de 25 mètres.



Question 1. Partie expérimentale

a. Un skieur de fond perdu dans le brouillard s'arrête, les skis bien horizontaux pour ne pas glisser, et cherche à se repérer à l'aide de son altimètre et de sa boussole. Il voit qu'il se trouve à 100 mètres d'altitude, avec ses skis orientés droit vers l'est. La pente est descendante vers sa gauche. Quelles est sa position sur la carte ?[29]

b. Le skieur décide de continuer son chemin à la boussole, droit vers l'est, jusqu'à atteindre la mer. Dessinez le profil du relief le long de l'itinéraire qui l'attend, en évaluant les dénivelés successifs.

c. Regardant mieux son altimètre avant de se mettre en route, le skieur s'aperçoit avec effroi que celui-ci est cassé, de sorte qu'il ne peut connaître son altitude et que ce qu'il avait déduit en (a) est erroné. Tracez sur la carte l'ensemble de ses positions possibles.

Un plaisancier mouillant dans la baie située au sud de la presqu'île voudrait franchir la presqu'île à skis pour rejoindre la côte nord, en se dirigeant toujours droit vers le nord.

d. Dessinez le profil du relief le long de divers itinéraires sud-nord, en évaluant pour chacun de ces itinéraires l'altitude du point culminant. En quel point de la baie le plaisancier doit-il aborder pour que son dénivelé soit le plus petit possible ? Marquez sur la carte le point culminant de son itinéraire, et évaluez-en l'altitude.

e. La presqu'île est soumise à un fort vent du nord. Coloriez sur la carte la zone de la presqu'île abritée du vent, en essayant de délimiter avec précision le bord de cette zone.

f. En quel(s) point(s) de la carte un skieur, perdu dans un épais brouillard, aura-t-il l'impression d'être sur un plateau ?

Question 2. Partie ¡¡ calculs ¿¿

En fait la fonction de la figure a pour expression

$$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$$

(les valeurs des niveaux étant exprimées en centaines de mètres).

a. Discutez, en fonction du paramètre v, l'allure du graphe de la fonction $f_{|y=v}$ (restriction de f à la droite ouest-est de latitude v).

b. Précisez par le calcul votre résultat de la question 1.b.

c. Discutez, ne fonction du paramètre u, l'allure du graphe de la fonction $f_{|x=u}$ (restriction de f à la droite sud-nord de longitude u), et précisez par le calcul vos résultats de la question 1.d.

d. Retrouvez et précisez par le calcul votre résultat de la question 1.f.

[29]Deux positions possibles

Question 3. Calcul d'un plan tangent

Le skieur de 1.a est en fait à l'altitude de 216,66 mètres (mais il ne le sait pas !). Cela correspond à $z = 13/6$ centaines de mètres. Étant dans les conditions de 1.a, on peut alors calculer ses coordonnées $x = 1$, $y = 0$: vérifier que ces coordonnées sont cohérentes avec l'équation donnée ci-dessus pour $z = f(x, y)$.

On veut trouver l'équation du plan tangent **P** à l'endroit où est le skieur.

a. On veut trouver la ¡¡ ligne de plus grande pente ¿¿ à l'endroit où est le skieur. Quelle est sa direction ? (raisonnez dans le plan **P** en faisant un dessin).

b. Donnez l'équation du profil du relief de la presqu'île passant par le skieur $(1, 0, 13/6)$, et dirigé vers le nord.

c. Donnez un vecteur directeur de la ligne de plus grande pente, puis l'équation de **P**.

Remarque : on pourra trouver d'autres exercices sur le même thème sur la page de F. Pham : www-math.unice.fr/membres/fpham.html.

I.43. Sommes de racines cinquièmes de l'unité

Source: `sommes_de_racines.tex`.

Version imprimable: `sommes_de_racines.pdf`

Angle pédagogique : *Expérimental. Nombres complexes*

Objectifs et commentaires. *Expérimenter, visualiser des sommes de nombres complexes, utiliser les propriétés du groupe des racines de l'unité (somme nulle, invariance par rotation).*

On considère l'ensemble des racines cinquièmes de l'unité. On en choisit certaines (entre une et cinq !), on fait leur somme, et on prend le module de cette somme.

Quel est le plus grand nombre que l'on peut obtenir de cette manière ?

Autrement dit, si U_5 désigne l'ensemble des racines cinquièmes de l'unité, la question consiste à calculer le nombre suivant :

$$\mathrm{Max}\left\{\left|\sum_{w\in E} w\right| \text{ avec } E \subset U_5\right\}.$$

Suggestions

– Rassemblez vos connaissances sur les racines $n$ièmes de l'unité ;

– expérimentez : représentez quelques-unes des sommes impliquées dans le problème ; pouvez-vous les calculer ? Faites une conjecture, prouvez la conjecture !

Généralisation Généralisez l'énoncé précédent. Essayez de deviner la réponse au problème généralisé. Prouvez votre conjecture...

I.44. Sommes des puissances p-ième des entiers

Source: `formules-de-sommes.tex`.

Version imprimable: `formules-de-sommes.pdf`

Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Le but de l'exercice est de montrer comment les concepts d'algèbre linéaire peuvent éclairer une question naturelle, la recherche d'une formule pour la somme des carrés (ou des cubes, etc...) des n premiers entiers.*

Par "formule", on entendra : trouver un polynôme Q_α tel que pour tout n,

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = Q_\alpha(n).$$

(on peut discuter cette formulation avec les étudiants, par exemple oralement, comme proposé à la question 1.)

*Ici, l'efficacité de l'algèbre linéaire apparaît surtout à la question **2.a**, qui montre une variante du principe "quand l'unicité implique l'existence" : pour montrer l'existence d'une formule, on est ramené à prouver la surjectivité d'une certaine application linéaire, et un argument de dimension (le "théorème noyau-image") permet de se ramener au calcul du noyau, qui est très simple. (Au passage, on doit dire pourquoi un polynôme périodique est nécessairement constant). La détermination explicite de la formule revient alors à inverser la matrice de Φ.*

On obtient les formules suivantes :

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) \quad ; \quad \sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2 \quad ;$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^4 = \frac{1}{30} N(N+1)(2N+1)\left(3N^2+3N-1\right).$$

Remarque : on pourrait aussi montrer a priori *que la condition donnée au **1.b** (existence de P) est nécessaire pour qu'une telle formule existe.*

Possibilité d'extension : pour quelles fractions rationnelles F existe-t-il une fraction rationnelle G telle que pour tout n,

$$\sum_{k=1}^{n} F(k) = G(n) \qquad ?$$

(indication : utiliser la remarque précédente.)

Vous connaissez la formule donnant la somme des n premiers entiers :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On voudrait savoir s'il existe des "formules analogues" pour les sommes de puissances supérieures :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 =? \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 =? \qquad \sum_{k=1}^{n} k^4 =? \qquad \text{etc...}$$

Question 1. Calcul de la somme des carrés.

a. Formulation précise : transformer la question vague en une question précise (qu'est-ce qu'une "formule analogue" ?).

b. Une idée : *supposons qu'on connaisse un polynôme P tel que* $X^2 = P(X+1) - P(X)$. On pourrait alors obtenir la formule recherchée ; voyez-vous comment ?

c. Résolution : trouver un tel polynôme P ; donner une formule pour la somme des carrés des n premiers entiers.

Question 2. Somme de puissances supérieures.

Soit α un entier supérieur ou égal à 3 ; on cherche maintenant une formule pour la somme

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}.$$

a. En généralisant la méthode utilisée à la question 1, montrer qu'il existe une "formule analogue" à celle obtenue pour la somme des carrés ;
– **remarque :** on ne demande pas de trouver explicitement la formule, mais seulement de montrer son existence ;
– **suggestion :** on considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}^{\alpha+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\alpha}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$$

A quelle propriété de cette application peut-on relier le problème ?

b. Donner une formule pour $\alpha = 3$.

c. Expliquer la stratégie pour obtenir une formule pour $\alpha = 4$.

I.45. Suite des puissances d'un nombre complexe

Sources et figures: `suites-complexes/`.
Version imprimable: `suites-complexes.pdf`
Angle pédagogique : *Expérimental. Suites*

Objectifs et commentaires. *Le but principal de l'exercice est de voir une suite qui a comportement "compliqué" (ni convergente ni périodique), bien qu'étant définie par une formule simple et "naturelle"; d'ailleurs, cette suite joue un rôle dans de nombreux phénomènes (voir le commentaire à la fin de l'exercice).*

Au passage, on révise le comportement des suites géométriques dans les cas déjà connus, et on peut comprendre géométriquement la multiplication complexe.

La deuxième partie est prévue pour être distribuée après que les étudiants aient résolu le cas facile.

Proposition de piste à fournir aux étudiants *L'étude devrait avoir deux grandes étapes :*

1) les cas faciles, quand le module de z est différent de 1 ;

2) le cas $|z| = 1$; ce deuxième cas se subdivise bien sûr en rationnel/irrationnel (voir ci-dessous).

Cas faciles

– S'ils bloquent dès le début, leur faire remarquer que le comportement dépend sans doute du choix du nombre z (il y a une infinité de questions cachée dans la questions !), il va peut-être falloir séparer l'étude en différent cas : il faut commencer par "classer les 'z' dans des boîtes"; comment trouver le critère de répartition (les étiquettes sur les boîtes !) ? Bien sûr, il faut prendre des exemple de valeurs de z. Une bonne idée est de commencer par le cas réel (ils connaissent déjà, et ça va servir).

– Une remarque clé est d'utiliser l'écriture "coordonnées polaires" en module/argument (savoir choisir la représentation des complexes adaptée au problème est certainement un objectif pédagogique important !) : en effet, elle s'entend bien avec la multiplication.

– Il faudra utiliser $|ab| = |a||b|$. Et le cas des suites géométriques réelles.

– Une fois terminée l'étude des cas faciles, demander un dessin (par exemple pour $z = 1/2$, puis $z = 1/2 \times \exp(i\pi/6)$, pour que l'on voit bien que la suite "tourne").

Cas difficiles *Une fois les cas faciles résolus et les cas difficiles identifiés, on peut leur distribuer la seconde partie de l'énoncé, qui décompose la démarche pour les cas difficiles.*

I.

On se donne un nombre complexe z. Étudier, en fonction de z, le comportement de la suite

$$(z^n)_{n\geq 0}.$$

Aide : il y a des cas facile, et des cas difficiles. Essayer de trouver rapidement les cas faciles !

II.

On suppose que vous avez résolu le cas facile, quand le module de z est différent de 1. On s'intéresse maintenant aux cas difficiles.

Question 1. Cas périodique

Essayer de trouver tous les z tels que la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ soit périodique. Autrement dit, compléter l'énoncé suivant :

THÉORÈME *La suite* $(\exp(2i\pi n\theta))_{n\geq 0}$ *est périodique si et seulement si ...*

Question 2. Cas non périodique

(i). — Donner un exemple de nombre z tel que la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ ne soit pas périodique.

(ii). — On suppose que la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ n'est pas périodique. Montrer que dans ce cas, elle ne prend jamais deux fois la même valeur.

(iii). — Traduire en symboles mathématiques la propriété suivante (pour le moment, on ne demande pas de la démontrer !) :
On peut trouver des éléments de la suite aussi près qu'on veut de 1 *dans* $\mathbb{C}$.

(iv). — Compléter l'énoncé suivant (on l'appelle "principe des tiroirs") :
Si on a 1000 *points distincts sur le cercle unité, alors il y en a forcément deux qui sont à distance plus petite que ....*

À l'aide de ce principe, démontrer que l'on peut effectivement trouver des éléments de la suite aussi près qu'on veut de 1 dans $\mathbb{C}$.

(v). — En déduire que tout arc de cercle de longueur plus grande que ... contient (au moins) un point de la suite.

(vi). — En déduire que tout arc de cercle contient une infinité de points de la suite...

III. Commentaires

Il existe de très nombreux problèmes dans l'étude desquels apparaît la suite des puissances d'un nombre complexe de module 1. En fait, ce genre de suite apparaît dès qu'on étudie une situation où se superposent deux phénomènes périodiques de périodes différentes.

Voici un premier exemple simple. La terre tourne autour du soleil en environ 365,24 jours ; c'est pourquoi l'année de notre calendrier grégorien (qui est un calendrier solaire) comporte en moyenne 365,24 jours (365 ou 366 selon que l'année est bissextile ou pas). Une lunaison dure environ 29,53 jours ; c'est pourquoi l'année du calendrier musulman (qui est un calendrier lunaire) comporte en moyenne 12*29,53=354,36 jours (354 ou 355 jours selon que l'année selon que l'année est normale ou *abondante*). C'est pourquoi le début du ramadan (le 237^{ieme} jour de l'année musulmane) correspond chaque année à un jour différent du calendrier grégorien. Existera-t-il une année où le ramadan commencera le 1^{er} janvier ? En réfléchissant un peu, vous devriez comprendre pourquoi la réponse à cette question est liée au comportement de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ avec $z = e^{i2\pi\frac{354,36}{365,24}}$.

Et maintenant un exemple nettement plus sophistiqué. On considère une planète $\mathcal{P}$ (par exemple, la Terre) soumise à l'attraction gravitationnelle d'une étoile $\mathcal{E}$ (le Soleil). Si la planète $\mathcal{P}$ n'est pas soumise à d'autres forces, on sait (depuis Newton) écrire et résoudre les équations du mouvement du système. En particulier, on sait que, dans ce cas, la planète $\mathcal{P}$ a un mouvement périodique, et que sa trajectoire est une ellipse “autour” de l'étoile $\mathcal{E}$. Notons T la période de “rotation” de la planète $\mathcal{P}$ autour de l'étoile $\mathcal{E}$. Supposons maintenant qu'il existe une deuxième panète $\mathcal{P}'$ nettement plus grosse que $\mathcal{P}$ (par exemple, Jupiter) qui gravite autour de $\mathcal{E}$, et notons T' la période de rotation de $\mathcal{P}'$ autour de l'étoile $\mathcal{E}$. La planète $\mathcal{P}'$ exerce une force d'attraction gravitationnelle sur la planète $\mathcal{P}$. Cette force est très petite par rapport à l'attraction de l'étoile $\mathcal{E}$; néanmoins, au bout d'un très long temps, cette force pourrait faire dévier beaucoup la planète $\mathcal{P}$, et même l'ejecter du système. La force d'attraction que la planète $\mathcal{P}'$ exerce sur la planète $\mathcal{P}$ perturbe-t-elle beaucoup la trajectoire de la planète $\mathcal{P}$? Un théorème mathématique (difficile et profond) affirme que la réponse dépend en particulier du comportement de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ où $z = e^{i2\pi\frac{T}{T'}}$: si les termes de cette suite ne sont pas “bien répartis” sur le cercle unité, alors l'attraction de la planète $\mathcal{P}'$ risque de perturber beacuoup la trajectoire de la planète $\mathcal{P}$.

IV. Bilan

Le but était d'étudier, en fonction du nombre complexe z, le comportement de la suite

$$(z^n)_{n\geq 0}$$

et de voir que cette suite, pourtant définie de manière extrêmement simple, a un comportement très compliqué pour certaines valeurs de z.

Même si les cas intéressants ne sont pas ceux où la suite possède une limite, commençons par quelques rappels et remarques sur la limite d'une suite de nombre complexes.

Définitions On dit qu'une suite de nombres complexes $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers un nombre complexe c si le module de $u_n - c$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
On dit qu'une suite de nombre complexes $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers l'infini si le module de u_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Remarque Dans $\mathbb{R}$, il y avait deux manières d'aller à l'infini : tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$. Mais dans $\mathbb{C}$, tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'a aucun sens. C'est pourquoi la définition ci-dessus ne définit qu'une seule manière de tendre vers l'infini.

Passons maintenant à l'étude de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$. Pour ce faire, on écrit $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho \in [0, +\infty[$ est le module de z et $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z. On voit alors que

$$\text{pour tout } n \geq 0, \text{ on a } z^n = \rho^n e^{in\theta}.$$

Autrement dit, le module de z^n est ρ^n, et l'argument de z^n est $n\theta$.

Remarque Si on écrit z sous la forme $a + ib$ (avec a et b réels), on est bien en peine pour calculer z^n (sauf dans les cas très particuliers où z est réel ou imaginaire pur). On peut essayer d'utiliser le binôme de Newton, mais ça donne une formule inutilisable. Moralité : *quand on veut calculer les puissances d'un nombre complexe z, il faut écrire z sous la forme $\rho e^{i\theta}$, et surtout pas sous la forme $a + ib$.* [30]

[30] Plus généralement, pour chaque problème concernant les nombres complexes, il faut se demander laquelle des deux formes ($a + ib$ ou $\rho e^{i\theta}$) va être la plus adaptée au problème.

Cas où le module de z est différent de 1

Si ρ est strictement plus grand que 1, alors ρ^n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Par conséquent, si le module de z est strictement plus grand que 1, alors la suite $(z^n)_{n\geq n}$ tend vers l'infini dans $\mathbb{C}$ (voir la définition ci-dessus).

Si ρ strictement plus petit que 1, alors ρ^n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par conséquent, si le module de z est strictement plus petit que 1, alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ tend vers 0 dans $\mathbb{C}$.

Cas où le module de z est égal à 1

Il reste à considérer le cas où le module de z est égal à 1. On commence par remarquer que, dans ce cas, le module de z^n est égal à 1 pour tout n ; autrement dit, tous les termes de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ sont sur le cercle unité. Ceci est loin de déterminer complètement le comportement de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$.

Pour essayer de visualiser le comportement de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$, on remarque que chaque terme de la suite est obtenu à partir du précédent par une rotation de centre 0 et d'angle θ (où θ est l'argument de z). Ceci permet de dessiner facilement les premiers termes de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$: on part de $z^0 = 1$, on "tourne de θ" pour obtenir z, on "tourne de θ" pour obtenir z^2, *etc.*.

Il est alors naturel de se poser les questions suivantes : la suite repasse-t-elle plusieurs fois par la même valeur ? Est-elle périodique ? Sinon, que dire de son comportement ? On démontre d'abord le résultat suivant :

Théorème *La suite $(z^n)_{n\geq 0}$ est périodique si et seulement si le module de z est égal à* 1 *et l'argument de z est un nombre rationnel multiplié par 2π.*

Le théorème nous dit en particulier que si l'argument de z n'est pas un rationnel multiplié par 2π, alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ n'est pas périodique. Plaçons-nous dans ce cas. On montre alors que les termes de la suite sont tous distincts. En utilisant le *principe des tiroirs*, on en déduit qu'il existe "des termes de la suite situés aussi près qu'on veut de 1". Puis, on en déduit que dans chaque arc (même très petit) du cercle unité, il y a une infinité de termes de la suite. Une autre façon de le dire est que la suite passe (et repasse une infinité de fois) aussi près qu'on veut de chaque point du cercle unité... On dit que la suite est *dense dans le cercle unité.*

Théorème *Si l'argument de z n'est pas un rationnel multiplié par 2π, alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ est dense dans le cercle unité.*

Remarque Attention, même dans ce dernier cas, la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ ne passe pas par chaque point du cercle unité. Ce qu'on a montré, c'est qu'elle passe arbitrairement près de chaque point du cercle unité ; c'est très différent.

En résumé

• Si $|z| > 1$, alors la suite tend vers l'infini.
• Si $|z| < 1$, alors la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ tend vers 0.
• Si $|z| = 1$, et que l'argument de z est un rationnel multiplié par 2π, alors la suite est périodique.

• Enfin, si $|z| = 1$, et que l'argument de z n'est pas un rationnel multiplié par 2π, alors la suite est dense dans le cercle unité.

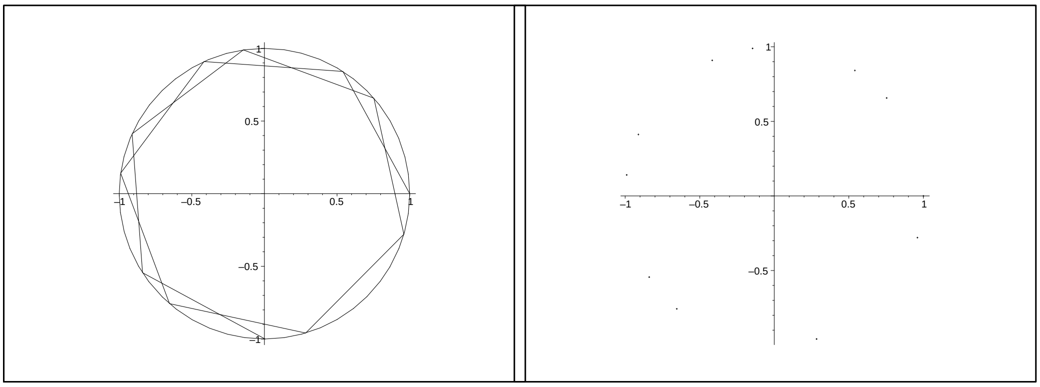
Commentaires

1 - Considérons la suite de nombres réels $(\cos n)_{n\geq 0}$. On remarque que, quel que soit n, le réel $\cos n$ n'est autre que la partie réelle du nombre complexe z^n avec $z = e^i = e^{i\times 1}$. Comme 1 n'est pas de la forme $2\pi\theta$ avec θ rationnel, il résulte de ce qui précède que tout arc du cercle unité contient une infinité de termes de la suite $(z^n)_{n\geq 0}$. On peut en déduire que tout intervalle inclus dans $[-1, 1]$ contient une infinité de termes de la suite $(\cos n)_{n\geq 0}$. Autrement dit :

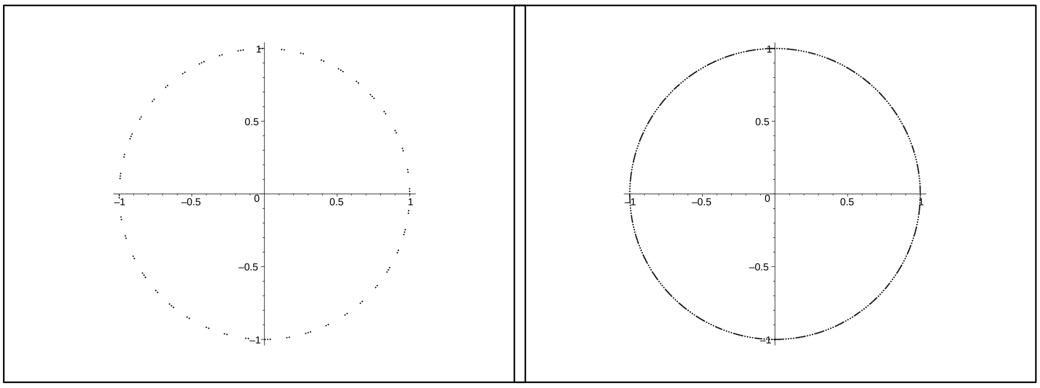
Corollaire *La suite* $(\cos n)_{n\geq 0}$ *passe, et repasse une infinité de fois, aussi près qu'on veut de chaque point de* $[-1, 1]$*. On dit que la suite* $(\cos n)_{n\geq 0}$ *est* dense dans $[-1, 1]$.

2 - L'arithmétique et l'étude des suites semblent *a priori* être des domaines mathématiques disjoints. Pourtant, on a vu ci-dessus un lien entre une propriété arithmétique d'un nombre (l'argument de z) et le comportement d'une suite (la suite $(z^n)_{n\geq 0}$). En fait, il existe de nombreux liens de ce type.

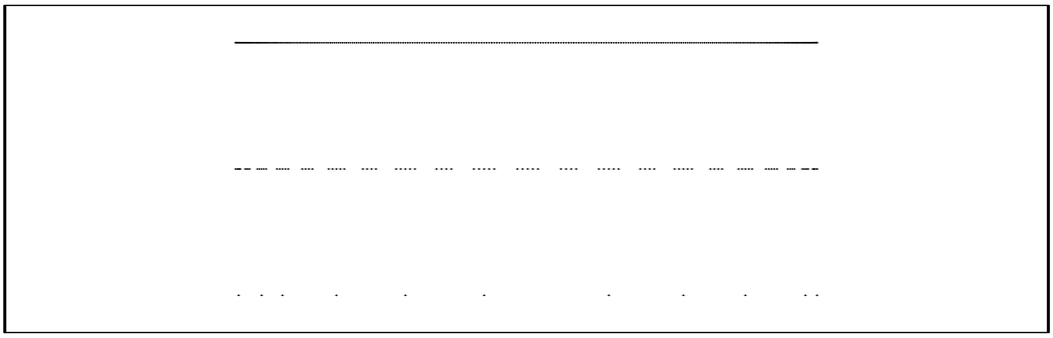
Dessins Ci dessous, on a représenté la suite z^n avec $z = e^i$: les 10 premiers points (1) en les reliant, (2) sans les relier ;



Toujours pour la même suite, (3) les 100 premiers points, (4) les 500 premiers points.



De même, de bas en haut, les 10, 100, 500 premiers points de la suite $(\cos n)$ dans le segment $[-1, 1]$.



I.46. Tableau de variations sans dériver *(Nouveau)*

Source: `variations-sans-deriver.tex`.

Version imprimable: `variations-sans-deriver.pdf`

Angle pédagogique : *Visualisation. Fonctions d'une variable réelle*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice fait voir comment on peut déterminer le sens de variation de fonctions simples sans calcul de dérivée.*

Question 1.

Rappeler rapidement les sens de variation des fonctions usuelles suivantes : $x \mapsto ax + b$ $(a, b$ constantes$)$; $x \mapsto e^x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \ln(x)$; $x \mapsto 1/x$.

Question 2.

Déterminer, en imitant l'exemple et sans calcul de dérivée, le tableau de variation des fonctions suivantes. On commencera par donner l'ensemble de définition.

- $f_1 : x \mapsto e^{2x+1}$;
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{-x}$;
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{e^x + 2}$;
- $f_4 : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$;
- $f_5 : x \mapsto \frac{1}{x+2}$;
- $f_6 : x \mapsto \frac{1}{1+1/x}$.
- $f_7 : x \mapsto \ln(x)^2$.

Exemple pour f_4 La fonction $f_4(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

1. Sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, lorsque x croît, $x^2 + 1$ décroît entre $+\infty$ et 1 ; donc son logarithme décroît entre $+\infty$ et $\ln(1)$.
2. Sur l'intervalle $[0, +\infty[$, lorsque x croît, $x^2 + 1$ croît entre 1 et $+\infty$; donc son logarithme croît entre $\ln(1)$ et $+\infty$.

D'où la tableau de variation complet...

Remarque On utilise que la composée de deux fonctions croissantes est croissante, la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante, *etc.*.

I.47. Tournois et relations d'ordre

Source: `tournoi.tex`.

Version imprimable: `tournoi.pdf`

Angle pédagogique : *Ludique. Théorie des ensembles, et structures de base*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice essaye de questionner ce qu'est un ordre, et comment on peut faire un classement. En toile de fond, il y a le probleme d'un algorithme de tri. Les étudiants sont parfois surpris que l'équipe médaillée d'argent n'est pas forcément la deuxième meilleure.*

Le fait de se poser la question de la validité de l'hypothèse que les équipes sont totalement ordonnées amène à se poser la question de la définition de l'ordre.

Question 1. Tournoi standard.

Supposons qu'il y ait 4 équipes à départager. Après un éventuel tirage au sort, le calendrier des matches est le suivant. 1ère demi-finale : l'équipe A rencontre l'équipe B ; 2ème demi-finale : l'équipe C rencontre l'équipe D. Ensuite, la finale des perdants oppose les deux perdants des 2 demi-finales, et la finale oppose les gagnants des 2 demi-finales. Finalement, on distribue des médailles : or et argent pour le gagnant et le perdant de la finale, bronze et chocolat pour le gagnant et le perdant de la finale des perdants.

On suppose qu'il existe une relation d'ordre total $\leq$ entre les 4 équipes, de sorte que si deux équipes E, E' sont telles que $E < E'$, alors le match de E contre E' sera remporté par E'.

Peut-on être sûr que l'équipe médaillée d'or est supérieure aux autres ? De même, peut-on être sûr que l'équipe médaillée d'argent est supérieure à celles médaillées de bronze et de chocolat ? Peut-on être sûr que l'équipe médaillée de chocolat est inférieure aux autres ?

Par ailleurs, pensez-vous que l'existence d'une telle relation d'ordre soit réaliste (voir aussi la question 2) ?

Question 2. Tournoi exotique.

Certains organisateurs de tournois sont des originaux : les tableaux suivants montrent trois de ces tournois dans lesquels 6 équipes se sont rencontrées. Les tableaux contiennent les gagnant de chaque match : par exemple, si A a gagné contre B (comme dans le tournoi 2), alors à la colonne A, ligne B on notera A (le signe - signifie qu'il n'y a pas eu de match entre les 2 équipes).

Pour chacun des trois tournois, déterminer s'il existe un ordre total comme dans la question précédente qui détermine l'issue du match. S'il en existe, le tournoi permet-il de le déterminer ? Sinon, donner tous les ordres possibles compatibles avec le résultat du tournoi. S'il n'existe pas d'ordre compatible avec les résultats du tournoi, expliquer pourquoi.

Tournoi 1	A	B	C	D	E	F
A	*	-	C	D	-	-
B	-	*	B	-	-	F
C	C	B	*	-	C	C
D	D	-	-	*	E	D
E	-	-	C	E	*	E
F	-	F	C	D	E	*

Tournoi 2	A	B	C	D	E	F
A	*	A	A	D	-	A
B	A	*	C	-	-	-
C	A	C	*	-	E	-
D	D	-	-	*	D	-
E	-	-	E	D	*	E
F	A	-	-	-	E	*

Tournoi 3	A	B	C	D	E	F
A	*	-	C	-	-	-
B	-	*	-	D	B	F
C	C	-	*	-	-	-
D	-	D	-	*	-	D
E	-	B	-	-	*	-
F	-	F	-	D	-	*

Question 3. Préordre et équipes équivalentes.

Supposons qu'à l'issue d'un tournoi, il n'existe pas d'ordre sur l'ensemble des équipes qui détermine l'issue des matches. On dit qu'une équipe e' est *apparemment meilleure* que e (et on note $e \prec e'$) si il existe des équipes $e_1, \ldots, e_n$ telles que e a perdu un match contre e_1 qui a perdu un match contre e_2 qui a perdu un match contre e_3, etc. et e_n a perdu un match contre e' (on considère qu'une équipe e est apparemment meilleure qu'elle même : $e \prec e$). On dira que deux équipes e et e' sont *équivalentes* si $e \prec e'$ et $e' \prec e$.

Montrer que la relation $\prec$ est une relation de pré-odre, c'est à dire qu'elle est transitive et réflexive. Donner un exemple où elle n'est pas anti-symétrique.

Montrer que la relation ¡¡e *et* e' *sont équivalentes*¿¿ est une relation d'équivalence. Quelles ses classes d'équivalences dans le premier tournoi ?

a. Démontrer le résultat suivant :

(i) Si $\prec$ est une relation de pré-ordre sur un ensemble, alors la relation $\sim$ définie par

$$x \sim y \iff x \prec y \text{ et } y \prec x$$

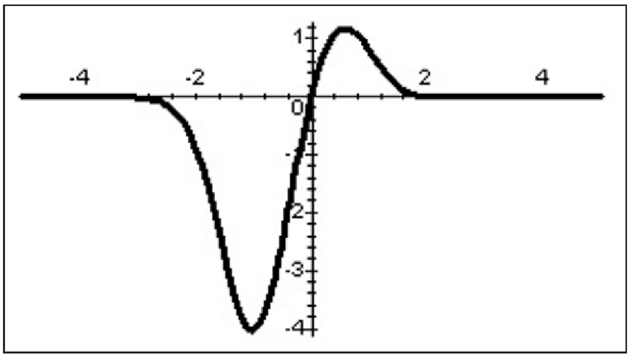
est une relation d'équivalence.
(ii) De plus, si X et Y sont deux classes d'équivalences pour la relation $\sim$, si il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $x \prec y$, alors pour tout $x' \in X$ et tout $y' \in Y$, on a $x' \prec y'$; proposer alors une définition pour une relation (entre les classes déquivalence) qu'on noterait $X \prec Y$.
(iii) Démontrer que la relation $X \prec Y$ définie au dessus est une relation d'ordre sur l'ensemble des classes d'équivalences de $\sim$.

b. Que peut-on déduire du résultat précédent à propos des classes d'équivalence dans un tournoi ?

I.48. Transformation de graphes de fonctions

Sources et figures: `transformation-de-graphes/`.
Version imprimable: `transformation-de-graphes.pdf`
Angle pédagogique : *Visualisation. Fonctions d'une variable réelle*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice demande aux étudiants de comprendre ce qui se passe quand on effectue des changements simples dans la formule définissant une fonction. Plus généralement, une des causes de l'échec en analyse est l'incapacité des étudiants à décortiquer les formules...*



On considère une fonction f dont le graphe est donné sur la figure.

1. Dessiner l'allure du graphe des fonctions $x \mapsto f(x) + 1$, $x \mapsto f(x + 3)$.
2. De même, tracer le graphe de $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto 2f(x)$, $x \mapsto f(2x)$.
3. Partant du graphe de la fonction f, on voudrait "le réduire d'un facteur 2" : plus précisément, on effectue une homothétie de rapport 1/2 centrée en l'origine. Le graphe de quelle fonction obtient-on ?

I.49. Transformation de graphes de fonctions, version longue *(Nouveau)*

Source: `transformation-de-graphes2.tex`.
Version imprimable: `transformation-de-graphes2.pdf`
Angle pédagogique : *Visualisation. Fonctions d'une variable réelle*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice relie géométrie et formules, de manière progressive.*

Question 1. Expérimentation

a. Dessiner le graphe de la fonction exponentielle.

b. En vous aidant éventuellement d'une calculatrice graphique, dessiner sur le papier les graphes des quatre fonctions suivantes : $-\exp(x)$; $\exp(x)+1$; $\exp(x)-1$; $2\exp(x)$.

Par quelles transformations géométriques passe-t-on du graphe de l'exponentielle aux graphes tracés ?

c. Mêmes questions pour les quatre fonctions $\exp(-x)$; $\exp(x+1)$; $\exp(x-1)$; $\exp(2x)$.

Question 2. Énoncé des correspondances

a. Relier chaque formule à la transformation géométrique qui lui correspond.

1. $-f(x)$;	1. translation vers le haut ;
2. $f(x)+1$;	2. translation vers le bas ;
3. $f(x)-1$;	3. translation vers la gauche ;
4. $2f(x)$;	4. translation vers la droite ;
5. $f(-x)$;	5. symétrie par rapport à l'axe des abscisses ;
6. $f(x+1)$;	6. symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ;
7. $f(x-1)$;	7. dilatation d'un facteur 2 dans le sens vertical ;
8. $f(2x)$.	8. dilatation d'un facteur 1/2 dans le sens horizontal.

b. Quelle formule correspond à une homothétie de rapport 2, centrée en l'origine ? À une rotation d'un demi-tour, centrée en l'origine ?

Question 3. Applications

Tracer le plus rapidement possible les graphes des applications suivantes. On commencera par tracer le graphe de la fonction élémentaire utilisée (sinus, cosinus, *etc.*). On pourra vérifier le dessin à l'aide d'une calculatrice graphique.

a. $f_1(x)=\sin(x)+1$; $f_2(x)=-\cos(x)$; $f_3(x)=\ln(-x)$ (test de la réponse : quel est son ensemble de définition ?) ; $f_4(x)=2\sqrt{x}$; $f_5(x)=\sin(2x)$; $f_6(x)=\sqrt{x+1}$ (tester l'ensemble de définition).

b. Plus difficile : $f_7(x) = 2\sin(x)+1$; $f_8(x) = \ln(2x+1)$; $f_9(x) = \sin(2x)+1$; $f_{10}(x) = 2\ln(x+1)$.

En déduire le tableau de variations de chacune de ces fonctions, *sans calcul de dérivée.*

Question 4. Une démonstration

a. Soit H l'homothétie du plan $\mathbb{R}^2$ centrée en l'origine et de rapport 1/2. Donner une formule pour $H(x, y)$.

b. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{G}$ son graphe. Démontrer que le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}f(2x)$ est l'image de $\mathcal{G}$ par l'homothétie H.

I.50. Visualisation des notions d'injectivité et de surjectivité

Source: `injectif-surjectif.tex`.

Version imprimable: `injectif-surjectif.pdf`

Angle pédagogique : *Visualisation. Théorie des ensembles, et structures de base*

Objectifs et commentaires. *La première fois qu'on tombe sur ces définitions, elles semblent très abstraites, impossibles à retenir. On essaie d'amener les étudiants à visualiser ces notions (si on les visualise assez bien, il n'y a aucun effort de mémoire à faire pour retrouver les définitions), à manipuler les définitions, à réaliser qu'ils les ont déjà rencontrées sous d'autres mots, à les exprimer géométriquement pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque : les questions **d.** *et* **e.** *sont volontairement vagues, on ne peut y répondre qu'après avoir précisé les ensembles de départ et d'arrivée.*

Suggestion : rajouter d'autres questions sur le lien avec la résolution d'équations (chercher des solutions revient toujours à chercher des antécédants pour une certaine application ; ainsi, l'existence de solutions est reliée à la surjectivité, et l'unicité à l'injectivité...).

---

a. A l'aide de "patates", dessiner une application non injective, puis une application non surjective.

b. En vous aidant éventuellement des dessins, retrouver les définitions d'injectivité et de surjectivité. Ecrire ces définitions avec des mots et avec des symboles, et trouver deux formulations équivalentes de l'injectivité.

c. Interpréter les phrases suivantes en termes d'injectivité et de surjectivité : (1) Il existe des nombres complexes différents qui ont le même carré. (2) Tout nombre réel positif a une racine carrée. (3) Le nombre 3 n'est le sinus d'aucun nombre. (4) Un nombre complexe est caractérisé par ses parties réelles et imaginaires. (5) Un nombre complexe non nul est déterminé par son module et son argument.

d. "L'application qui associe à chaque individu son prénom est-elle injective, surjective ? Même question pour l'application numéro de sécurité sociale".

e. L'application sinus est-elle injective ? Comment cela se traduit-il, géométriquement, au niveau du graphe ? Mêmes questions pour la surjectivité.

f. Résoudre l'équation $e^z = 1 + i\sqrt{3}$.
L'application $z \mapsto e^z$ est-elle injective, surjective ?

Niveau II : DEUG deuxième année

II.1. 0,9999999...

Source: `numeration-decimale.tex`.
Version imprimable: `numeration-decimale.pdf`
Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Séries*

Objectifs et commentaires. *Utiliser les séries pour donner un sens à l'écriture décimale. Bien sûr, on peut répondre à la question en utilisant l'égalité* $3 \times 1/3 = 1$ *: si le nombre* $0,999...$ *a un sens, alors il doit être égale à* 1*. Mais on peut aussi en profiter pour définir ce nombre, comme la somme d'une série géométrique ; et, miracle !, on obtient bien* 1*...*

A-t-on $0,999... = 1$?
Indication : comment peut-on définir le nombre $0,999...$?

II.2. Calcul de la longueur d'une spirale

Sources et figures: `spirale/`.
Version imprimable: `spirale.pdf`
Angle pédagogique : *Visualisation. Séries*

Objectifs et commentaires. *Visualiser géométriquement des séries : ici, la spirale est constituée d'une infinité de segments, sa longueur s'obtient donc comme la somme d'une série. On s'est arrangé pour qu'il ne s'agisse pas d'une série géométrique (contrairement à la plupart des exemples simples de séries en géométrie). Voir un contexte où une série apparait naturellement.*

Sur la figure 7, le cercle est de rayon 1 et on donne les longueurs des segments OA_n : $l_n = 1/n$. Calculer la longueur de la spirale.

Aide : dans un triangle de côtés c_1, c_2 et c_3, on a $c_3^2 = (c_2 - c_1 cos\alpha)^2 + (c_1 sin\alpha)^2$, où α est l'angle entre les côtés c_1 et c_2.

II.3. Changement de l'ordre des termes d'une série

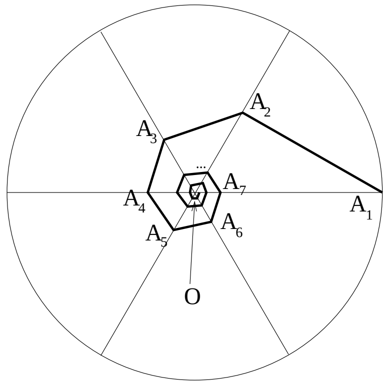


FIG. 7: construction d'une spirale

Source: `convergence-commutative.tex`.
Version imprimable: `convergence-commutative.pdf`
Angle pédagogique : *Expérimental. Séries*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Sensibiliser les élèves au délicat problème de la permutation des termes d'une série semi-convergente. Au passage, on utilise une version simple du "regroupement par paquets", et une comparaison série-intégrale.*

Les séries non-commutatives sont sans doute un sujet trop abstrait pour être abordé directement par les étudiants de DEUG ; c'est pourquoi nous leur proposons une phase expérimentale sous MAPLE (partie I). Dans un deuxième temps (partie II), on leur demande de démontrer ce qu'il ont observé en prenant garde à rester dans un cadre suffisamment concret. Dans la partie III, on traite d'abord le cas des séries à termes positifs. Maintenant qu'on a fait remarquer aux étudiants qu'il peut arriver des choses bizarres quand on permutte l'ordre des termes de certaines séries, on peut essayer d'obtenir d'eux une preuve de la convergence commutative dans le cas positif (alors que sans les parties précédentes, on peut parier que la question paraîtrait sans intérêt aux étudiants : ¡¡ évidemment, ça change rien, l'addition est commutative...¿¿. On revient ensuite à la série harmonique alternée, pour essayer de faire sentir aux étudiants la possibilité d'atteindre n'importe quelle valeur en changeant l'ordre des termes. Enfin, l'appendice exploite la non-commutativité pour obtenir un calcul de cette série (sans les séries entières).

L'exercice est assez long et peut être traité partiellement (par exemple, les parties I et II peuvent être traitées en TP sur logiciel de calcul, puis la partie III en TD, ou en ateliers en travail en groupe) ; mais nous recommandons de conserver l'ordre proposé (et surtout de ne pas proposer la partie III sans la partie I).

Remarque : *la question 1 de la partie III est volontairement vague, les étudiants ressentiront peut-être le besoin de formaliser ce que signifie "changer l'ordre des termes". On peut les aider en leur suggérant de penser aux suites extraites* $(u_{\varphi(n)})$ *: ici, que doit vérifier l'application* φ *?...*

Les questions qui nécessitent une preuve et qui n'utilisent pas MAPLE sont notées (♣). Il est conseillé d'utiliser MAPLE au maximum dans les calculs. Les questions sont logiquement indépendantes.

I. Expérimentation

Question 1.

Notre série semi-convergente préférée est la série harmonique alternée de terme général

$$u_n = -\frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{avec } n \geq 1.$$

Ses termes sont successivement positifs et négatifs :

$$\sum u_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots$$

Vérifier (à l'aide de MAPLE) qu'elle est semi-convergente (*i.e.* convergente mais non absolument convergente). Quelle est sa somme ?

Question 2.

Nous construisons une nouvelle série $\sum v_n$ à partir de $\sum u_n$ en modifiant l'ordre d'apparition de ses termes : cette fois, un terme positif sera suivi de *deux* termes négatifs. La série $\sum v_n$ s'écrit donc :

$$\sum v_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

Calculer les sommes partielles de $\sum v_n$ d'ordre 30, 90, 300 et les comparer à la somme de $\sum u_n$.

II. Première démonstration

Alors que nous avons simplement modifié l'ordre des termes, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ semblent avoir des sommes différentes !

La question 1 démontre ce "paradoxe" en supposant que la série $\sum v_n$ converge. La question 2 prouve cette convergence. (Les questions sont indépendantes.)

Question 1. Les séries ont des sommes différentes

a. (♣) Écrire la forme du terme général v_n. (On pourra distinguer pour $m \geq 1$, les termes v_{3m-2}, v_{3m-1} et v_{3m}.)

b. Nous notons U_n et V_n les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Montrer que la suite $(U_{2l})_{l \geq 1}$ est strictement croissante, et que la suite $(V_{3m+1})_{m \geq 1}$ est strictement décroissante. Trouver des entiers l et m plus grands que 1 tels que $U_{2l} \geq V_{3m+1}$.

c. (♣) En admettant que $\sum v_n$ converge, conclure que la somme de la série $\sum u_n$ est strictement supérieure à la somme de sa série modifiée $\sum v_n$.

Question 2. Preuve de la convergence

Nous voulons montrer que $\sum v_n$ converge et faire calculer par MAPLE la somme exacte de $\sum v_n$. Nous aurons besoin du "*principe de regroupement par paquets*" :

Proposition : Principe de regroupement par paquets.

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série dont le terme général a_n tend vers 0. Nous définissons une nouvelle série $\sum_{m\geq 1} b_m$ en regroupant les termes par paquets de trois :

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ b_2 &= a_4 + a_5 + a_6, \\ &\dots \\ b_m &= a_{3m-2} + a_{3m-1} + a_{3m}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Alors, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_m$ sont de même nature (convergentes ou divergentes). Si elles convergent, leurs sommes sont égales.

Ainsi pour étudier la convergence de $\sum v_n$ il est plus simple de grouper les termes par paquets de trois et d'introduire la série $\sum w_m$:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 + v_2 + v_3, \\ w_2 &= v_4 + v_5 + v_6, \\ &\dots \\ w_m &= v_{3m-2} + v_{3m-1} + v_{3m}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Calculer explicitement le terme général w_m. En déduire que la série $\sum v_n$ converge (utiliser le regroupement par paquets). Demander à MAPLE sa somme, et comparer à $\sum u_n$.

III. Démonstration sur papier (♣)

Dans les deux premières parties, on a constaté expérimentalement que changer l'ordre des termes de la série harmonique alternée pouvait modifier la valeur de la somme, puis on a donné une preuve de ce résultat. On propose maintenant d'explorer d'autres aspects du changement d'ordre des termes d'une série.

Question 1. Cas des séries à termes positifs

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, et $\sum v_n$ une série obtenue à partir de la précédente en changeant l'ordre des termes.

a. Si $\sum u_n$ converge, est-ce que $\sum v_n$ converge nécessairement ?

b. Si les deux séries convergent, ont-elles la même somme ?

Question 2. Changement d'ordre qui fait diverger la série harmonique alternée

a. Montrer qu'il est possible de changer l'ordre des termes de la série harmonique alternée pour obtenir une série divergente ! (**Aide :** la série à termes positifs $\sum u_{2n+1}$ est divergente).

b. Montrer qu'il est possible de changer l'ordre des termes de la série harmonique alternée pour obtenir une série dont la somme vaut 100 (ou bien tout autre nombre qui vous plaira).

Question 3. Pour aller plus loin...

Proposer une conjecture qui généraliserait à d'autres séries les résultats obtenus sur la série harmonique alternée. Prouver la conjecture.

IV. Appendice : un calcul de la somme de la série harmonique alternée

Nous souhaitons retrouver maintenant les sommes S et S' que donne MAPLE pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Question 1. Une première relation entre S et S'

On regroupe les termes de $\sum u_n$ par paquets de deux en définissant la série $\sum t_m$ de terme général

$$t_m = u_{2m-1} + u_{2m}, \quad \text{avec } m \geq 1.$$

Calculer t_m et trouver une relation simple entre t_m et w_m (miracle !). En déduire une relation simple entre les sommes S et S'.

Question 2. Une seconde relation (♣)

Indépendamment de la question précédente, montrer que pour $m \geq 1$,

$$V_{3m} = U_{2m} + \sum_{k=m+1}^{2m} u_{2k}.$$

Pour étudier ensuite $\sum_{k=m+1}^{2m} u_{2k}$, comparer u_n à une intégrale et prouver,

$$\int_m^{2m} \frac{1}{2x} dx \geq \sum_{k=m+1}^{2m} u_{2k} \geq \int_{m+1}^{2m+1} \frac{1}{2x} dx.$$

En déduire la limite de $\sum_{k=m+1}^{2m} u_{2k}$ lorsque m tend vers $+\infty$ puis une nouvelle relation entre les sommes S et S'.

Question 3. Conclusion (♣)

Conclure en donnant les valeurs de S et S'.

Question 4. Question subsidiaire (♣)

Prouver le "principe de regroupement par paquets".

II.4. Compacité

Source: `compacite.tex`.
Version imprimable: `compacite.pdf`
Angle pédagogique : *Découverte. Topologie*

Objectifs et commentaires. *Faire comprendre aux élèves un des intérêts de la notion de compacité pour les parties du plan (dans la version "fermé-borné") ; faire appliquer le théorème sur les fonctions continues sur les compacts dans un cadre géométrique, et voir la nécessité de l'hypothèse de compacité. On suppose que les étudiants connaissent cette définition des compacts, ainsi que le théorème.*

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. On note Δ l'axe des abscisses. Si $M = (x, y)$ est un point du plan, on note $d(M, \Delta)$ la distance de M à Δ.

Question 1.

a. Donner une formule pour $d(M, \Delta)$.

b. Soit maintenant E une partie du plan. Comment définiriez-vous la distance de E à Δ ? On la note $d(E, \Delta)$.

c. Trouvez un exemple d'ensemble E disjoint de Δ, mais vérifiant pourtant $d(E, \Delta) = 0$.

d. Probablement, l'exemple que vous avez trouvé n'est pas un ensemble fermé. Trouvez un autre exemple qui soit de plus un ensemble fermé.

e. Montrer que *si E est compact*, alors le paradoxe précédent ne peut pas arriver : autrement dit, montrer que tout ensemble compact disjoint de Δ vérifie $d(E, \Delta) > 0$).

Question 2.

Y a-t-il toujours un point M de E qui "réalise la distance à Δ", c'est-à-dire tel que $d(M, \Delta) = d(E, \Delta)$? Trouvez des contre-exemples ; montrez que la réponse est affirmative si E est compact.

II.5. Construction de fractales géométriques

Source: `fractales.tex`.
Version imprimable: `fractales.pdf`

Angle pédagogique : *Découverte. Fractales*

Objectifs et commentaires. *Voir plus bas...*

Ceci n'est pas à proprement parler un exercice, mais un ensemble d'exercices qui ont été utilisés dans le cadre d'un stage "de transition DEUG-Licence" (oups, je veux dire "de transition L2-L3").

Nous avons pris pour prétexte la construction d'une famille d'ensembles fractals dans le plan, les ensembles-limite des *systèmes de fonctions itérés* ou *IFS*. Il s'agit d'un procédé général qui permet de construire une infinité de fractales, dont les fractales géométriques classiques (flocon de neige, tapis ou triangle de Sierpinski, ensemble de cantor, fougère, arbre, éponge de Menger...).

On peut se faire rapidement une idée du contenu du stage en visitant ce très joli site (regarder notamment les rubriques 1.E et 1.F, "Iterated functions systems" et "Inverse problems").

Pour un mathématicien professionnel, le fractal est obtenu facilement comme point fixe d'un procédé contractant dans un espace métrique complet (en l'occurrence, il s'agit de l'espace des compacts du plan, muni de la distance de Hausdorff). Pour les étudiants, nous avons passé deux semaines à introduire le procédé, à prouver l'existence d'un ensemble-limite "à la main", puis à montrer l'unicité de l'ensemble-limite (qu'on parte d'un clown ou d'un triangle, on converge vers le triangle de Sierpinski, voir par exemple notre feuille II.2).

> Voici le point important : *toutes les activités techniques étaient motivées par notre histoire de fractales*. La motivation principale était de donner un sens aux ensembles-limite qu'on voit apparaître quand on itère un certain procédé. On espère que ce point de vue aide à donner un sens aux manipulations abstraites d'objets formels, sans lesquelles on ne peut pas faire de maths.

Cette histoire permet de manipuler un certain nombre de techniques :

- de la théorie des ensembles, par exemple des unions et intersections infinies (feuille I notamment) ;
- des applications linéaires du plan de manière très visuelle, un exemple de décomposition simple motivée par des logiciels java (feuille II) ;
- les propriétés des similitudes (feuille II) ;
- des nombres complexes (pratiques pour décrire et démontrer des propriétés des similitudes, feuilles II et IV) ;
- de la topologie, la notion de limite, un exemple d'espace métrique naturel mais très différent des espaces euclidiens, les notions de bases : ouverts, fermés, adhérence...(feuilles III et IV) ;
- une suite réelle définie par récurrence à l'aide d'une fonction contractante, comme exemple simple analogue à notre procédé de construction de fractales (feuille IV.2) ;
- une introduction au théorème du point fixe contractant ;
- des équations différentielles, et comment un procédé contractant permet de démontrer l'existence et l'unicité des solutions sur des exemples (feuille IV.5), ce qui donne une introduction à la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz ;
- les paradoxes de l'infini, et la notion de dénombrabilité (à travers l'histoire de l'Hotel de Hilbert, feuille V).

Le "quizz" donné à la fin du stage donne une idée de quelques points techniques précis qui ont été abordés.

Les 60 pages distribuées aux étudiants au cours du stage sont disponibles ici.

II.6. Déformer un carré en un cercle

Sources et figures: `Carre-en-cercle/`.

Version imprimable: `Carre-en-cercle.pdf`

Angle pédagogique : *Visualisation. Topologie*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice peut constituer une introduction à la notion d'homéomorphisme. Il a aussi l'intérêt de demander aux étudiants de modéliser une déformation décrite géométriquement par une formule. On fait ainsi apparaître une utilisation "concrète" d'une fonction de trois variables.*

On peut visualiser la déformation avec un petit programme, par exemple en Maple, disponible sur le site d'EXEMAALT :

http://matexo.emath.fr/exemaalt/exos_individuels/tex/Carre-en-cercle/Carre-en-cercle.mws

Les formules pour déformer un bateau en un crabe sont malheureusement un peu plus compliquées...

On travaille dans le plan. Soit S le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1, et C le carré de sommets $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ et $(1,-1)$ (voir la figure).

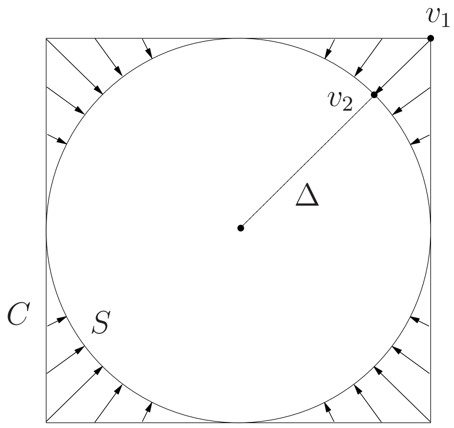


Fig. 8: L'application g

On voudrait construire une application g du plan dans lui-même qui envoie le carré C sur le cercle S. L'idée de la construction est donnée par la figure, voici des précisions :

1. l'application g fixe le point $O = (0,0)$;
2. pour chaque demi-droite Δ issue de O, Δ coupe le carré C en un (unique) point v_1, et le cercle S en un (unique) point v_2. En restriction à Δ, g coïncide avec l'unique homothétie qui envoie v_1 sur v_2.

Question 1. Formule

Donner une formule pour une application g ayant les propriétés requises.

Petite aide Quelles est la norme qui a pour boule unité le disque dessiné sur la figure ? Même question pour le carré. On peut utiliser ces deux normes...

Grosse aide [31]

a. Soit v un vecteur non nul du plan, et Δ_v la demi-droite issue de O contenant v. Donner, en fonction de v, les vecteurs v_1 et v_2 intersection de Δ_v avec le carré et le cercle (indication : utiliser la norme euclidienne $\|v\|_2$ et la "norme infini" $\|v\|_\infty$).

b. Donner le rapport de l'homothétie qui envoie v_1 sur v_2 : en fonction de v_1 ; puis en fonction de v.

c. Donner $g(v)$ en fonction de v.

Question 2. Réciproque

a. On définit une application h de manière similaire à l'application g ci-dessus, mais en inversant les rôles du carré et du cercle. En vous inspirant du A, donner une formule pour h.

b. Vérifier que g et h sont deux applications réciproques.

Question 3. Continuité

Montrer que g et h sont continues.

Question 4. Déformation

On voudrait maintenant "déformer progressivement le carré C vers le cercle S". Pour faire ça, on rajoute un paramètre "temps" $t \in [0, 1]$. Soit v un point du carré, on notera $g_t(v)$ la position de v au temps t. On veut avoir les propriétés suivantes : $g_0(v) = v$; $g_1(v)$ est le point $g(v)$ du cercle S ; et quand t varie entre 0 et 1, $g_t(v)$ parcourt le segment $[v\ g(v)]$ à vitesse constante.

Donner une formule pour $g_t(v)$. Dessiner l'image du carré C par l'application $g_{\frac{1}{2}}$ (que deviennent les coins du carré ?...).

Expliquer comment on peut utiliser cette formule pour réaliser un programme sur ordinateur qui affiche la déformation.

[31] Adapter l'aide au niveau de difficulté cherché ; si l'on a assez de temps, le plus intéressant est probablement de ne pas donner d'aide du tout (même si, dans ce cas, les étudiants ne suivront sans doute pas la piste la plus courte).

Commentaire Une application bijective, continue, et dont la réciproque est continue est appelée un *homéomorphisme* : ainsi, les applications g et h ci-dessus sont des homéomorphismes du plan dans le plan.

II.7. Des dés ronds

Source: `de_rond.tex`.

Version imprimable: `de_rond.pdf`

Angle pédagogique : *Ludique. Fonctions de plusieurs variables réelles*

Objectifs et commentaires. *Dans cet exercice, on donne une motivation inhabituelle pour calculer des aires de surfaces courbes : la probabilité pour qu'un point marqué sur un dé rond arrive à telle ou telle hauteur. Il n'est pas intuitif qu'on obtienne une probabilité uniforme (sur l'intervalle* $[0, 2R]$*) dans le cas d'un dé sphérique. Une des difficultés sera sans doute de modéliser le tirage du dé sphérique car l'espace des positions d'une sphère est compliqué (c'est* SO_3*), même si l'ensemble des positions d'un point sur cette sphère est paramétré par la sphère.*

Cet exercice vient d'une question question que m'avait posé un ami physico-chimiste. Il voulait comprendre la probabilité que le point marqué soit à telle ou telle hauteur, pour modéliser le mouvement d'une protéine à la surface d'une électrode si je me rappelle bien...

On vous propose un jeu de dés un peu spécial. Le dé est une boule de 10cm de diamètre sur laquelle un point rouge est marqué. On lance le dé sur une table (horizontale) et on attend qu'il s'arrête. Le résultat du lancer est la hauteur en centimètres entre le point rouge et la table. Ainsi, le dé prend ses valeurs entre 0 et 10. Vous misez puis vous devez choisir l'une des options suivantes :

– Pari bas : vous pariez que le résultat du dé sera compris entre 0 et 3. Si vous avez raison, vous gagnez 4 fois la mise (c'est à dire, vous reprenez votre mise, plus 3 fois son montant). Sinon, vous perdez la mise.
– Paris haut : vous pariez que le résultat du dé sera compris entre 3 et 10. Si vous avez raison, vous gagnez 1.33 fois la mise (c'est à dire, vous reprenez votre mise, plus le tiers de son montant). Sinon, vous perdez la mise.

Quelle option choisissez-vous ?

Suggestion : il est peut-être plus facile, pour commencer, de traiter le cas d'un dé cylindrique. . .

.

II.8. Des Dominos en Série

Source: `dominos-en-series.tex`.

Version imprimable: `dominos-en-series.pdf`

Angle pédagogique : *Visualisation. Séries*

Objectifs et commentaires. *Visualiser la série harmonique (somme des inverse des entiers) ; voir un contexte physique où elle apparaît, et où sa divergence à une signification : on peut construire une pile de domino avec un porte-à-faux aussi grand qu'on veut (en théorie...) En pratique, même si la divergence de la série est très lente, on arrive à obtenir un décalage d'une longueur supérieure à celle d'un domino, ce qui est déjà spectaculaire (si vous n'avez pas de domino, un jeu de cassettes audio homogène fait très bien l'affaire !)*

On peut sans doute donner cet exercice en introduction aux séries, avant qu'elles aient été abordées en cours (la divergence de la série est très facile à montrer en regroupant les termes entre n et $2n$).

Question subsidiaire : combien faut-il de dominos, au minimum et en théorie, pour avoir un décalage de 1 dominos ? Comparer à la pratique. Combien faut-il de dominos pour avoir un décalage de 10 dominos ? On peut répondre à ces questions par une estimation sur machine, ou bien en utilisant la comparaison entre la série et une intégrale.

Remarque : c'est un exercice difficile ; le plus simple est sans doute de raisonner en partant du haut de la pile, et de calculer par récurrence l'emplacement du centre de gravité des k dominos du dessus dans la position limite.

On peut aussi obtenir une solution "qualitative" : supposons que la pile de dominos est constituée de sous-piles exactement verticales (sans aucun porte-à-faux), le porte-à-faux ne provenant que du décalage entre deux sous-piles successives. Notons n_1, n_2, etc. le nombre de dominos de chaque sous-pile (en partant du haut). Alors si chaque n_k est assez grand devant la somme des n_i précédents, le décalage entre deux sous-piles successives peut être choisi égal à $1/4$. Ceci prouve que l'on peut obtenir un décalage total arbitrairement grand. Il s'agit là de la preuve la plus courte, probablement pas la plus facile à comprendre...

Une dernière remarque : on montre dans cet exercice qu'on peut atteindre un porte-à-faux arbitrairement grand ; cependant, il n'existe sans doute pas de pile de dominos, constituée d'un infinité de dominos satisfaisant aux conditions d'équilibre, avec un porte-à-faux infini. Ceci demanderait une preuve !

Cet exercice est extrait de La physique en question, Mécanique, *J.-M. Lévy-Leblond, éditions Vuibert (question 13).*

Zazie joue avec ses dominos. Elle veut les empiler l'un sur l'autre en surplomb, chaque domino dépassant celui sur lequel il est posé, de façon a construire une pile aussi inclinée que possible. Quel est le nombre maximal de dominos, et quel est le porte-à-faux maximal (distance horizontale entre le domino supérieur et le domino inférieur) que l'on peut atteindre en principe sans que la pile s'effondre ?

Suggestion : à quelle condition le dernier domino de la pile (celui du haut) est-il en équilibre sur l'avant-dernier ? Dans cette position, à quelle condition ces deux-là sont-ils en équilibre sur l'avant-avant-dernier, etc. ?

II.9. Déterminant marrant

Source: `determinant-marrant.tex`.

Version imprimable: `determinant-marrant.pdf`

Angle pédagogique : *Ludique. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Utiliser les propriétés simples du déterminant.*

En admettant le fait que les nombres 2001, 1073, 5800 et 8903 sont tous divisibles par 29, montrer que le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 3 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est aussi divisible par 29 (on ne demande PAS de calculer ce déterminant !).

II.10. Exemples de systèmes dynamiques linéaires, matrices stochastiques

Source: `systemes_dynamiques_lineaires.tex`.

Version imprimable: `systemes_dynamiques_lineaires.pdf`

Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires.

Objectif "méta" : *voir comment un même concept mathématique peut modéliser des situations issues de domaines variés, et comment un théorème abstrait peut résumer toutes ces situations, ce qui illustre la généralité des outils développés par les mathématiciens ;*

Objectif d'ouverture : *donner une idée de ce qu'est un système dynamique ;*

Objectif interne : *voir des situations où les puissances de matrices, et les vecteurs propres, ont un sens concret (voir ci-dessous) ;*

Objectif "technique" : *calcul de suites définies par une relation de récurrence linéaire, puissances d'une matrice, diagonalisation.*

Remarques mathématiques *A cause de la nature des problèmes choisis, tous les systèmes proposés ici (sauf la dernière question) sont régis par des matrices de transition (ce qui signifie que les coefficients sont positifs, et que la somme des coefficients de chaque colonne vaut* 1*). On peut montrer qu'une telle matrice a toujours une direction propre dans le cône positif (ensemble des vecteurs dont toutes les coordonnées sont positives), qui correspond à la valeur propre* 1*.* [32] *De plus, si la matrice est transitive (c'est-à-dire qu'il existe une certaine puissance dont tous les termes sont strictement positifs), alors cette direction propre est unique, et attire tout vecteur du cône positif. Autrement dit, les systèmes dynamiques considérés ici ont un unique point fixe qui attire toutes les orbites.*

Remarques pédagogiques *Le sujet est très long, mais il garde un sens si on n'en fait seulement la partie I, ou bien seulement I et II (on peut éventuellement ensuite leur raconter "magistralement" la preuve de III).*

Ces exercices peuvent être proposés en travail en groupe de trois à quatre personnes. On suggère de disposer de deux heures, de donner, dans la partie I, un exercice différent à

[32] L'existence peut s'obtenir facilement comme conséquence du théorème de point fixe de Brouwer, mais peut aussi se prouver par des considérations d'algèbre linéaire élémentaire : voir le théorème de Perron-Frobenius, par exemple dans le livre Katok, Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, Cambridge University Press, 1995.

chaque groupe (en adaptant éventuellement aux niveaux : l'exercice sur la maladie est plus difficile, puisqu'on est en dimension 3 au lieu de 2, et qu'il y a des valeurs propres complexes). Il vaut probablement mieux ne pas donner l'énoncé complet à l'avance aux étudiants, puisque le principe consiste à leur faire construire l'énoncé du théorème à partir des cas particuliers étudiés.

Vers la fin de la résolution, on peut faire remarquer aux élèves que les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 ont un sens par rapport au problème posé : il s'agit d'états d'équilibre, et on montre facilement que si le système admet un état limite, alors ce doit être un tel vecteur propre (par contre l'existence théorique et la propriété de contraction évoqués ci-dessus sont plus difficiles). De plus, le calcul des valeurs propres suffit pour prouver que la suite converge (pas besoin pour cela de calculer les autres vecteurs propres, ni d'inverser la matrice de passage).

On peut enfin demander aux étudiants de critiquer les modèles (il s'agit évidemment de "modèles-jouets"). Les modèles pertinents sont rarement linéaires, mais le linéaire a l'avantage de conduire à des calculs explicites, et est souvent une bonne approximation d'un système général au voisinage des états d'équilibre. On peut également introduire le cadre général des systèmes dynamiques, et évoquer d'autres problèmes y conduisant (mécanique céleste, météo, etc.), l'analogue en temps continu (équations différentielles), etc..

Certains de ces exercices sont librement inspirés d'un document d'accompagnement de la mise en œuvre des programmes de Terminale Economique et Sociale sur la théorie des graphes (rentrée 2002), voir l'adresse :

http://www.eduscol.education.fr/D0015/Intentions.htm .

Afin de préserver le suspense, il est fortement recommender de ne pas lire la partie II avant d'avoir résolu l'une des questions de la partie I, ni la partie III avant d'avoir répondu aux questions de la partie II.

I. Où les maths modélisent des situations diverses

Choisissez l'un des quatre exercices suivants.

Question 1. Migration entre deux villes

Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre plus de possibilités d'emplois ; 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour trouver un meilleur emploi. Sachant qu'à l'année 0, un quart des habitants sont en X, quelle est la population de X et de Y au bout de 1 an, 2 ans, 5 ans, 10 ans ?

Question 2. Agence matrimoniale

Dans une ville donnée, 30% des femmes mariées divorcent chaque année, et chaque année, 20% des femmes célibataires se marient. De plus, le nombre total de femmes reste constant. On suppose qu'en l'an 2000, il y a 8000 femmes mariées et 2000 célibataires. Quel est le nombre de femmes mariées après une année, deux années, cinq années, dix années ?

Question 3. L'allumeur de réverbère

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état du réverbère de sa planète avec une probabilité de 75%. Au jour 0, le réverbère est éteint. Quelle est la probabilité qu'il soit éteint demain, et la probabilité qu'il soit allumé ? Que valent ces probabilités dans deux jours, cinq jours, dix jours, un an ?

Indication : si les probabilités vous embètent, vous pouvez considérer une formulation équivalente : on imagine qu'il y a cent réverbères, chacun pouvant être allumé ou éteint ; chaque jour, l'allumeur change l'état de 75% des réverbères. Sachant qu'au jour 0, tous les réverbères sont éteints, calculer le nombre de réverbères éteints et allumés le lendemain, *etc.*.

Question 4. Propagation d'une maladie

On considère une maladie causée par une piqûre d'insecte. Dans la population touchée par cette maladie, les individus sont dans trois états possibles : immunisés, malades, ou porteurs sains. D'un mois à l'autre, l'état d'un individu peut changer de la manière suivante :

- un individu immunisé à 90% de chance de le rester, mais peut aussi devenir porteur sain avec une probabilité de 10% ;
- un porteur sain a une chance sur deux de devenir malade, et une chance sur deux de rester porteur sain ;
- un individu malade a 20% de chance de rester malade, et 80% de chance de guérir (il devient alors immunisé).

Sur une population d'un million d'habitants, quelles sont les proportions de gens malades, porteurs sains et immunisés au bout d'un mois, de 2 mois, de 5 mois, de 10 mois, de 10 ans ? On pourra supposer qu'au départ, la population est totalement immunisée, ou bien au contraire qu'un tiers des gens est dans chacun des trois états. [33]

II. Où l'on tente de dégager un énoncé général

Dans cette partie, on suppose que chaque étudiant est au courant des résultats des quatre questions de la partie I ; la mise en commun des résultats peut se faire à l'occasion de la question 2.

Les quatre exemples ci-dessus semblent indiquer que la modélisation de nombreux problèmes va conduire à calculer les puissances d'un certain type de matrices. Il serait donc intéressant d'avoir des résultats généraux sur ce type de matrices. Dans la suite, on essaie de construire un énoncé de théorème d'algèbre linéaire, puis de le démontrer.

Question 1. Points communs aux modèles étudiés (hypothèses)

On cherche d'abord à relever les points communs aux quatre situations étudiées dans la première partie.

[33] Ici le calcul de la matrice inverse n'est pas très agréable. Une fois que les élèves ont constaté cette difficulté, on peut leur suggérer de laisser tomber ce calcul, et de le remplacer par le calcul de la limite et par une estimation de la vitesse de convergence (ici, celle de suites géométriques dont le module de la raison est de l'ordre de 1/10).

Habituellement, dans ce genre de situation, on résume les informations dans un diagramme appelé *graphe de transition.* Voici par exemple le graphe de transition correspondant aux migrations entre les deux villes :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[loop left, "95\%"] \arrow[r, bend left, "5\%"] & \mathrm{Y} \arrow[l, bend left, "20\%"] \arrow[loop right, "80\%"] \end{tikzcd}$$

Les sommets du graphes correspondent aux différents états possibles (ici, habiter la ville X ou la ville Y), et les flèches donnent le pourcentage de gens qui passent d'un état à un autre, d'une année sur l'autre.

a. Dessiner les graphes de transition correspondant aux autres situations de la première partie.

Dans chacune de ces situations, la suite des états successifs était décrite par une relation de récurrence linéaire, de la forme

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Le vecteur X_n s'appelle *vecteur d'état* du système, et la matrice A est la *matrice de transition.* Par exemple, pour la migration entre villes, $X_n = (a_n, b_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, où a_n est la population de la ville X après n jours, et b_n la population de Y.

b. Ecrivez les matrices de transition correspondant aux situations de la première partie.

c. Trouvez des propriétés vérifiées par les coefficients de ces quatre matrices.[34] Comment ces propriétés sont-elles reliées aux situations concrètes que l'on a modélisées ?

Question 2. Points communs (résultats)

a. Trouvez le plus de points communs possibles concernant les valeurs propres et vecteurs propres des quatre matrices. Fabriquez un énoncé plausible de théorème d'algèbre linéaire résumant ces propriétés.

b. Testez votre énoncé sur des exemples les plus simples possibles ; modifiez éventuellement l'énoncé si vous trouvez des contre-exemples !

c. Trouvez des points communs concernant la convergence de la suite de vecteurs (X_n). Complétez votre "théorème" (ou bien mettez ces résultats dans un deuxième énoncé).

III. Où l'on tente de prouver l'énoncé général !

On suggère les énoncés suivants :

THÉORÈME *Soit A une matrice carrée de taille n, dont les coefficients sont tous strictement positifs, et telle que la somme des coefficients dans chaque colonne est égale à* 1.

[34]Les coefficients sont positifs ou nuls, et la somme des coefficients de chaque colonne est égale à 1

Alors 1 *est valeur propre de* A*, et le sous-espace propre associé est de dimension* 1*. Toutes les autres valeurs propres (dans* $\mathbb{C}$*) sont de modules strictement inférieurs à* 1.

Corollaire *Soit* A *une matrice vérifiant les hypothèses du théorème précédent, et* X_0 *un vecteur non nul, dont les coordonnées sont toutes positives ou nulles. Soit* $(X_n)_{n\geq 0}$ *la suite de vecteurs définie par la relation de récurrence* $X_{n+1} = AX_n$*.*

Alors la suite (X_n) *converge vers un vecteur* X_∞*. Ce vecteur est un vecteur propre associé à la valeur propre* 1*, dont toutes les coordonnées sont strictement positives, et dont la somme des coordonnées est égale à la somme des coordonnées de* X_0*.*

Remarques concernant le théorème

- L'hypothèse "*strictement* positifs" est un peu embêtante, puisque la matrice du quatrième exemple ne vérifie pas cette hypothèse. Expliquer néanmoins pourquoi on ne peut pas supprimer le mot "strictement" dans l'énoncé. *Question optionnelle : en regardant la matrice* A^2*, expliquer pourquoi on peut quand même utiliser le théorème pour le quatrième exemple.*
- On va se contenter ici de prouver le théorème dans le cas diagonalisable.

Question 1. La valeur propre 1

On considère donc une matrice A vérifiant les hypothèses du théorème, et diagonalisable.

L'idée-clé est de considérer la matrice B transposée de la matrice A.

a. Montrer que 1 est valeur propre de A et de B. Trouver un vecteur propre V associé à la valeur propre 1 pour la matrice B.

b. Montrer le lemme suivant (pour une matrice diagonalisable) :

Lemme *Une matrice a les mêmes valeurs propres que sa transposée, avec mêmes multiplicités, et mêmes dimensions pour les sous-espaces propres.*

c. Montrer que, pour la matrice B, le sous-espace propre E_1 est de dimension 1.
Aide : commencer par le cas des matrices de taille 2. [35]

Question 2. Les autres valeurs propres

Montrer que les autres valeurs propres sont de modules strictement inférieurs à 1. (On peut se contenter de traiter le cas de taille 2, et admettre le cas général).

Question 3. Preuve du corollaire

a. En utilisant l'hypothèse que A est diagonalisable, montrer que la suite (X_n) converge.

[35] On traduit sur les coordonnées le fait que $BU = U$, et on considère la coordonnée U_{i_0} de U la plus grande (sans valeur absolue) ; si il existe une coordonnée strictement plus petite, on obtient $U_0 < U_0$, contradiction, d'où U est multiple du vecteur V.

b. Terminer la preuve du corollaire.

IV. Applications

Dans des modèles de ce type, on appelle *état d'équilibre* toute répartition de la population qui ne change pas d'année en année.

Conséquences pratiques du théorème *"Pour tout problème du type des quatre questions de la partie I, on sait à l'avance (sans calcul !) que :*

- *pour une population totale donnée, il existe un unique état d'équilibre ;*
- *on trouvera cet état d'équilibre en résolvant le système d'équations linéaires qui traduit le fait que la population ne change pas (en langage savant, en cherchant un vecteur propre pour la valeur propre 1 !) ;*
- *quelle que soit la répartition initiale de la population, la suite des répartitions convergera vers l'état d'équilibre.*

Appliquez le théorème obtenu à l'étude d'une des situations ci-dessous. Comparez à l'étude faite dans la partie I, quand on ne connaissait pas encore le théorème.

Question 1. Météo

Dans ce pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. S'il a fait beau un jour, il y a autant de chances qu'il neige que de chances qu'il pleuve le lendemain. S'il fait mauvais (pluie ou neige), il y a une chance sur deux que ca ne change pas le lendemain, mais si ca change, alors le changement se fait seulement une fois sur deux vers le beau temps.

Dans ce pays, quelle est la proportion de jours de beau temps, de pluie et de neige ? [36]

Question 2. Machines en panne

Une unité de production comprend deux machines automatiques fonctionnant indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine a la fiabilité p au cours d'une journée, ce qui signifie que sa probabilité de tomber en panne pendant cette période est égale à $1-p$. Dans ce cas, elle sera réparée pendant la nuit et se retrouvera en état de marche le lendemain. Une seule machine peut être réparée à la fois : si les deux machines tombent en panne le même jour, alors la deuxième ne sera réparée que la nuit d'après.

Après une longue période, quelle est le nombre moyen de journées où une seule machine est en panne, et de journées où les deux machines sont en panne simultanément ?

Autres idées

Les chaînes de Markov permettent de modéliser le parcourt d'un prince charmant qui délivre sa Princesse, les gains ou pertes d'un parieur, la croissance des branche d'un arbre, des propriétés statistiques d'un langage ou d'un morceau de musique (comment écrire un texte qui ait l'apparence de l'anglais, ou bien un morceau de musique qui "ressemble" à du Bach, jusqu'à la méthode d'authentification d'un sonnet

---

[36]État d'équilibre : $(1,2,2)$. Les autres valeurs propres sont $1/4$ et $-1/4$.

de Shakespeare...). Les références sur le Web sont innombrables, voir par exemple http://bi.snu.ac.kr/Courses/g-ai01/HMM-Introduction.pdf pour du pseudo-anglais.

II.11. Formes quadratiques en relativité

Source: `relativite.tex`.
Version imprimable: `relativite.pdf`
Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Faire remarquer que les formes bilinéaires non positives sont utilisées en physique. La relativité restreinte est basée sur l'invariance de la forme de Lorentz.*

En relativité, contrairement à l'adage, *tout n'est pas relatif.* Les longueurs et le temps sont effectivement des quantités relatives – c'est à dire qui dépendent du référentiel dans lequel on se place. Cependant, il y a un *absolu* en relativité : c'est la forme de Lorentz. Dans certaines bases privilégiées, la forme de Lorentz s'exprime par la formule $\mathcal{L}(x, y, z, t) = x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ (où c est la vitesse de la lumière dans le vide). En particulier, le fait qu'un objet aille à la vitesse de la lumière signifie que son quadrivecteur vitesse $\vec{V}(v_x, v_y, v_z, 1)$ satisfait $\mathcal{L}(\vec{V}) = 0$. Comme la forme de Lorentz ne dépend pas du référentiel, la quantité $\mathcal{L}(\vec{V})$ est indépendante du référentiel choisi, donc le fait *d'aller à la vitesse de la lumière* est indépendant du référentiel choisi – ce qui ne peut pas être vrai en mécanique newtonnienne d'après la loi d'additivité des vitesses.

a. On dit que $\vec{V}$ est dans le *cône de lumière* lorsque $\mathcal{L}(\vec{V}) = 0$. Voyez-vous pourquoi ?

b. Quels sont le rang et la signature de la forme de Lorentz $\mathcal{L}$?

c. Existe-t-il une base dans laquelle la forme de Lorentz a la forme $q(x) = x^2 - 4xy + yt - zt + t^2$?

II.12. Gènes sur les chromosomes sexuels

Source: `chromosomes-sexuels.tex`.
Version imprimable: `chromosomes-sexuels.pdf`
Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Etude d'un système dynamique linéaire issu de la génétique. Cet exercice permet de voir les notions de vecteur propre et de valeur propre dans un contexte différent, et motivant.*

Remarque. *L'exercice est probablement trop long pour être traité en entier en TD. On peut le donner en devoir à la maison ou n'en traiter qu'une partie. La première partie est intéressante pour motiver les notions de vecteur propre et valeur propre* avant *leur introduction en cours (ou à défaut comme premier exercice d'une feuille de TD sur* *ces notions). La troisième partie est une itération d'une application affine. Les calculs de vecteurs propres sont (un peu) plus délicats. Toujours pour la troisième partie, l'interprétation de la valeur limite en fonction des taux de sélection et de mutations ne sont pas évidentes.*

Question 1. Problème introductif : gènes sur les chromosomes sexuels, effet de la reproduction seule

Les femmes ont deux chromosomes X et les hommes ont un chromosome X et un chromosome Y. Certains gènes sont situés sur le chromosome X. C'est le cas par exemple pour un gène G lié à une forme de daltonisme. Ce gène G possède deux versions (on dit deux *allèles* en biologie), une qu'on appellera S (sain) et l'autre qu'on appellera M (malade) qui est à l'origine du daltonisme. En fait, ce gène est recessif, ce qui signifie que seules les femmes qui ont deux fois la version M du gène seront daltoniennes. Les hommes eux n'ont qu'une copie du gène G et sont daltoniens si ils ont la version M. Le but du problème est d'étudier la propagation de ce gène.

Soit H_0 la proportion des gènes G des hommes qui sont en version M à la génération 0. Soit F_0 la proportion des gènes G des femmes qui sont en version M à la génération 0. Pour rendre les choses plus concrètes, on peut supposer que dans l'etat initial, le gène version M n'est présent que chez les hommes, et disons avec une proportion $H_0 = 2\%$

a. Décrire l'évolution des proportions de gènes G chez les hommes et les femmes d'une génération à la suivante. *Indication :* un homme reçoit forcément son chromosome X de sa mère. Une femme reçoit un chromosome X de chaque parent.

b. Exprimer les équations d'évolution de H_n et F_n matriciellement. En déduire une expression du vecteur $\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix}$ et d'une puissance d'une matrice A.

c. Des conditions initiales pour lesquelles les calculs sont faciles. — Supposons que la population initiale, décrite par $v_0 = \begin{pmatrix} H_0 \\ F_0 \end{pmatrix}$ satisfasse $A.v_0 = \lambda v_0$ pour un certain réel λ.[37] Vérifier que $\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix}$ est alors facile à calculer.

d. Chercher les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que l'équation d'inconnue v $A.v = \lambda v$ admette une autre solution que le vecteur nul. Quels sont les vecteurs v correspondants ? Ces vecteurs ont-ils une interprétation biologiques ?

e. Principe de superposition (linéarité) : comment résoudre le problème à partir des cas des cas où les calculs sont faciles. — Soit $v_0 = \begin{pmatrix} 2/100 \\ 0 \end{pmatrix}$. Écrire v_0 comme une somme de deux vecteurs propres v_1, v_2 (dont les images par A^n sont faciles à calculer). En déduire $\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix}$.

---

[37] On dit dans ce cas que v_0 est vecteur propre de A (si $v_0 \neq 0$).

f. En déduire la limite de $\begin{pmatrix} H_n \\ F_n \end{pmatrix}$ quand $n \to \infty$ Que peut-on constater, à la limite, pour les proportions de gène M chez les hommes et les femmes ? Au bout de combien de génération ceci est-il vrai à 1% près ? À 10^{-6} près ?

Remarques. En résumé, le cheminement est le suivant : on cherche le plus possible de vecteurs propres pour lesquels l'image par A^n est facile à calculer. On espère en trouver assez pour que toute condition initiale (ou au moins, celle qui nous interesse) puisse s'exprimer comme superposition (combinaison linéaire) de vecteurs propres. Si c'est le cas, on a gagné.

Le fait que *tout* vecteur peut s'exprimer comme combinaison linéaire de vecteurs propres signifie qu'il existe une base formée de vecteurs propres. On dit dans ce cas que A est diagonalisable.

Question 2. Si on introduit la sélection naturelle

Il est plus commode de repenser la question suivante en terme d'opérateur (opérateur linéaire = endomorphisme). On s'intéresse toujours à la répartition du gène M dans la population masculine et féminine. On appelle donc *état de la population* le vecteur $v = \begin{pmatrix} H \\ F \end{pmatrix}$. L'espace des états de la population est donc ici $V = \mathbb{R}^2$. [38]

Dans la question précédente, on a étudié l'effet de l'itération de *l'opérateur reproduction*. Cet opérateur prend en entrée l'état de la population avant reproduction, et sort l'état de la population après reproduction. Dans le modèle donné au dessus, R est une application linéaire de V dans V donnée par $R(\begin{pmatrix} H \\ F \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} F \\ \frac{1}{2}(H+F) \end{pmatrix}$.

On veut de même modéliser la sélection naturelle par un *opérateur de sélection* S. On part du principe que les hommes sont beaucoup plus atteints de daltonisme que les femmes (car M est recessif, donc pour qu'une femme soit malade, il faut qu'elle ait deux gènes M), et on fait l'hypothèse que les femmes ne sont jamais malades, et donc que la sélection naturelle ne s'applique pas sur elles. Le nombre d'hommes malades est proportionnel à H, et on peut supposer que la sélection naturelle fait passer d'une proportion H de gènes M à une proportion σH où σ (comme Sélection) est un réel entre 0 et 1, c'est un paramètre du modèle.

a. Que vaut σ pour une sélection naturelle très forte (maladie très handicapante) ? Et pour une maladie peu handicapante ?

b. Donner la matrice de l'opérateur de sélection S.

c. On suppose qu'à chaque génération, il y a d'abord reproduction puis sélection. Donner la matrice de l'opérateur qui fait passer d'une génération n à la suivante.

d. En s'inspirant de ce qui a été fait dans la question précédente, que peut-on dire du comportement de l'état de la population quand n tend vers l'infini ?

---

[38] Même si les états pertinents biologiquement ont leurs deux coordonnées positives, on a vu l'utilité de considérer des vecteurs a priori non pertinents biologiquement : pour parler de vecteur propre, il faut se trouver dans un espace vectoriel.

e. On a choisi de faire agir la reproduction avant la sélection. Qu'aurait donné le modèle si on avait fait le contraire ?

Question 3. Et des mutations

On introduit maintenant un nouvel opérateur M de mutation. On note μ la probabilité qu'un gène malade mute en gène sain et μ' la probabilité pour qu'une mutation inverse se produise (on suppose que ces probabilités de mutations sont les mêmes chez les hommes et chez les femmes).

a. Calculer l'opérateur de mutation. Que constatez-vous ? Pouvez-vous donner sa matrice ? Ecrire $M(v)$ sous la forme $N(v) + v_0$.

b. Supposons qu'à chaque génération, il y ait d'abord mutation, puis reproduction, puis sélection naturelle. Quel est l'opérateur qui fait passer d'une génération à la suivante ? Écrire cet opérateur sous la forme $A(v) + w_0$.

On est ainsi conduit à l'étude de l'itération d'une application affine $v \mapsto A(v) + w_0$. Un *truc* permet de se ramener à l'étude d'un opérateur linéaire : il s'agit d'introduire artificiellement une coordonnée supplémentaire z, telle qu'on retrouve l'opérateur précédent en faisant $z = 1$, mais de sorte que le nouvel opérateur soit linéaire (et non plus affine). Ici, on considèrera $M' : \begin{pmatrix} H \\ F \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} H \\ F \end{pmatrix} + zw_0 \\ z \end{pmatrix}$. [39]

c. A partir de l'étude des vecteurs propres et valeurs propres de M', donner le comportement de la population lorsque n tend vers l'infini.

II.13. Intégration d'équivalents

Source: `integration-d-equivalents.tex`.

Version imprimable: `integration-d-equivalents.pdf`

Angle pédagogique : *Découverte. Fonctions d'une variable réelle*

Objectifs et commentaires. *Manipulation d'équivalents, de la définition de la limite, intégration d'inégalités, le tout motivé par un problème ouvert. La rédaction ci-dessous est volontairement la plus concise possible (destinée à un travail en petits groupes, sur une durée assez longue). Voici quelques pistes pour guider les étudiants et éventuellement aller plus loin :*

- *essayer sur des exemples ; ce qui amène la question : trouver des fonctions simples équivalentes à $1/x$ (ce qui déjà peut amèner à revenir sur la définition du mot équivalent) ; $1/x$, $1/x+1/x^2$, $1/(x+10)$, $1/(x+ln(x))$ sont des bonnes condidates ;*
- *la conjecture la plus simple est sans doute "F tend vers $+\infty$", qu'il est déjà intéressant de prouver ;*
- *c'est l'occasion de rappeler la propriété fondamentale de positivité de l'intégrale (en pratique, intégration des inégalités) ;*

[39] On peut aussi faire un changement de variables affine bien choisi.

- *on peut ensuite montrer qu'en $+\infty$ la fonction F est coincée entre $\frac{1}{2}\ln$ et $\frac{3}{2}\ln$;*
- *puis prouver que $F \sim \ln$;*
- *on peut enfin s'attaquer à l'énoncé général : si f est équivalente à une fonction g positive dont l'intégrale est divergente, alors les primitives de f et de g sont équivalentes.*

Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ une fonction (supposée continue pour pouvoir être intégrée), et F une primitive de f. On suppose qu'en $+\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x}$.

Que peut-on dire du comportement de F en $+\infty$?

Pour aller plus loin. Proposer une conjecture qui généralise cette situation. Prouver la conjecture...

II.14. Introduction à la topologie : la caractéristique d'Euler-Poincaré

Sources et figures: `Euler-Poincare/`.

Version imprimable: `Euler-Poincare.pdf`

Angle pédagogique : *Expérimental. Topologie*

Objectifs et commentaires. *La topologie est, parmi les matières enseignées en DEUG, l'une de celles où la démarche scolaire est la plus éloignée de l'intuition. Paradoxalement, c'est aussi l'une des branches des maths les plus vulgarisées. On essaie ici de faire en sorte que "les deux bouts se rejoignent" : à l'issue d'une exploration informelle dont le but est d'amener les étudier à "penser topologiquement", on introduit formellement la notion d'homéomorphisme, qui est l'un des concepts centraux de la topologie. C'est aussi un prétexte pour faire découvrir la caractéristique d'Euler-Poincaré, et un très beau résultat mathématique, sans attendre un cours d'homologie en DEA !*

Notons que ***la partie II ne doit pas être lue avant d'avoir résolu la partie I****, puisqu'elle contient la formule d'Euler que l'étudiant doit découvrir dans la partie I.*

Ce texte s'inspire par endroits du texte Geometry and the imagination.

Introduction

La topologie est à la fois une branche des mathématiques (où la recherche est encore très active), et une "boite à outils" utilisée dans toutes les autres branches des maths. Si l'on veut définir les concepts topologiques formellement, on s'appuie sur la théorie des ensembles ; après un chemin assez long (allant du DEUG à la Maîtrise), on arrive à définir et à étudier mathématiquement des objets comme les surfaces et leur généralisation en dimensions supérieures.

Ici, on va faire le choix inverse : pour une fois, nous allons raisonner sur des *objets non formalisés*, c'est-à-dire sans donner de définition précise, en se contenant d'idées intuitives. L'inconvénient est que ce flou sur les définitions se retrouve dans les démonstrations : on aura un peu moins de certitude que d'habitude sur les résultats obtenus. L'avantage est qu'on n'est pas obligé d'attendre la Maîtrise de maths pour étudier les surfaces...

A la fin, on essaiera de faire le lien entre les objets informels vus ici et le point de vue formel des cours de maths habituels.

I. Polyèdres et polygônes

Question 1. Comptabilité

Comptez le nombre de sommets, d'arêtes et de faces pour les polyèdres des figures 9, 10, 11 et 12. Remplissez le tableau suivant.

	n^0 1	n^0 2	n^0 3	n^0 4	n^0 5	n^0 6	n^0 7
sommets							
arêtes							
faces							

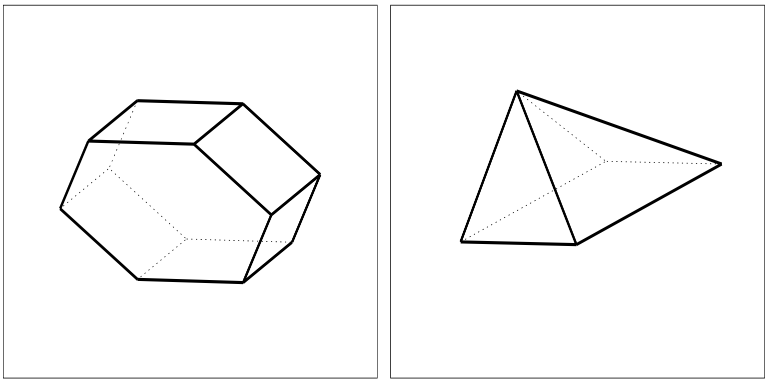


Fig. 9: Exemples de polyèdres (1)

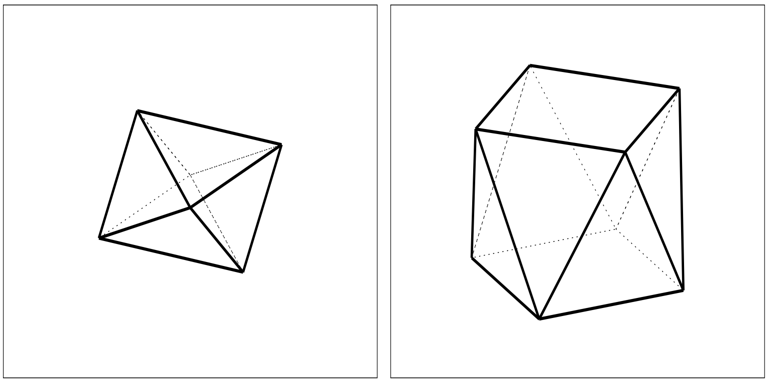


Fig. 10: Exemples de polyèdres (2)

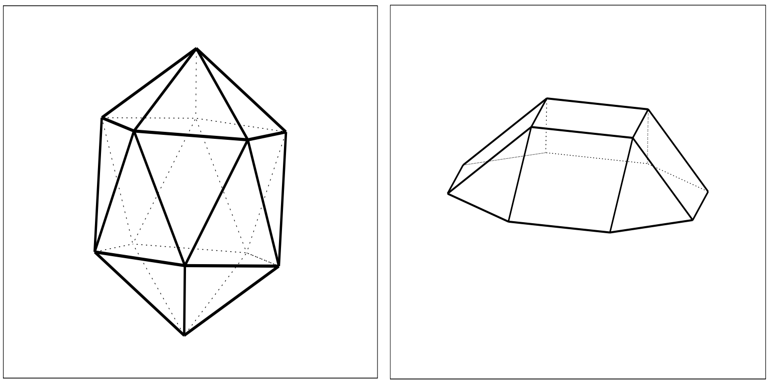


FIG. 11: Exemples de polyèdres (3)

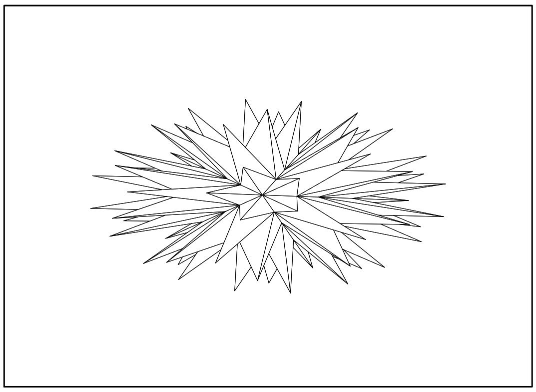


FIG. 12: Et un dernier polyhèdre ? ?...

Question 2. La relation d'Euler

Le mathématicien Euler a trouvé une formule très simple reliant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces, et *valable dans tous les polyèdres*. A l'aide des exemples de la question précédente, pouvez-vous retrouver cette relation ?

Question 3. Cas des polygônes du plan

Dessinez un polygône (triangle, carré, *etc.*), et découpez-le en un certain nombre de polygônes plus petits. Ici encore, comptez le nombre de sommets, d'arêtes et de petits polygônes. Quel relation y a-t-il entre ces trois nombres ? Essayez d'autres exemples.

Question 4. Preuves informelles

Pouvez-vous justifier cette dernière relation par un raisonnement ?
Pouvez-vous justifier la formule d'Euler ?
Énoncez les deux résultats prouvés dans un théorème.

II. Les surfaces, objets topologiques

Dorénavant, on notera toujours S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. On a donc obtenu les résultats suivants :

Théorème *(polyèdres) Pour tout polyèdre, le nombre $S - A + F$ vaut* 2.

Théorème *(découpages des polygônes) Pour tout découpage d'un polygône du plan, le nombre $S - A + F$ vaut* 1.

Ces deux théorèmes concernent les polyèdres et les polygônes, qui sont des objets géométriques. Nous allons maintenant examiner ces théorèmes sous l'angle de la topologie.

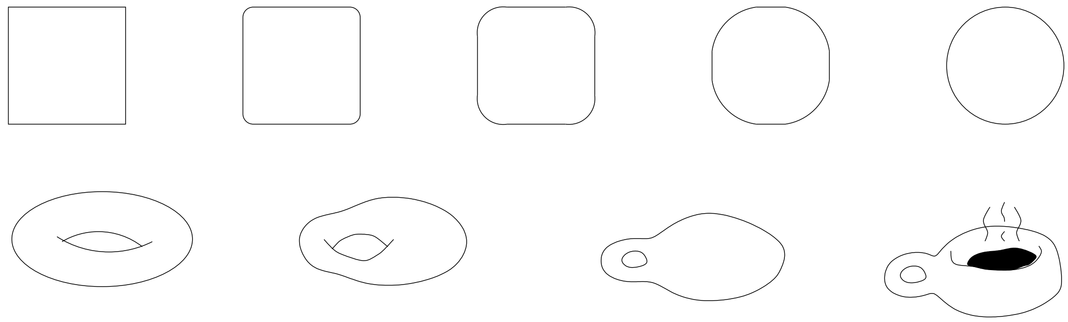


Fig. 13: Un carré se déformant en cercle, et un tore se changeant en tasse à café

Sur la plan intuitif, on peut dire que la topologie est une géométrie "molle", qui aurait oublié comment évaluer les notions géométriques de distance et d'angle ; c'est la théorie mathématique où l'on s'autorise à étirer, comprimer, tordre une forme, mais sans la déchirer ou la coller, et sans l'écraser. Quand on peut passer d'une forme à une autre par ce type de déformations, on dit qu'elles sont *topologiquement équivalentes*. Ainsi, un carré est topologiquement équivalent à un cercle, puisqu'on peut déformer continûment un carré en un cercle (voir figure 13). Un autre exemple est donné par la surface d'un tore (comme les bouées en caoutchouc) et celle d'une tasse à café (avec une anse).[40]

Question 1. Les lettres

Comme premier exercice de topologie informelle, regardons les lettres de l'alphabet (en capitales, et sans enluminures) comme des dessins dans le plan. Parmi ces lettres, lesquelles sont topologiquement équivalentes, lesquelles sont topologiquement différentes ? Combien y a-t-il de lettres dans l'alphabet d'un topologue ?

Question 2. Construction de quelques surfaces

Une *surface*[41] est une forme dont *tous les morceaux assez petits sont topologiquement équivalents à un petit disque du plan.* Par exemple, la surface d'un cube est une surface, qui est topologiquement équivalente à la surface d'une sphère[42]. Par contre, si vous rajoutez un mur dans le cube (vous changez le studio en un deux-pièces !), la réunion des murs n'est plus une surface, parce qu'il y a des points en lesquels trois cloisons se rencontrent, et que cette forme n'est pas topologiquement équivalente à un disque du plan. Ceci est illustré sur la figure 14.

[40]On peut bien sur définir de manière précise (en termes de théorie des ensembles) l'équivalence topologique (voir la fin du texte) ; mais nous allons nous contenter de raisonner avec cette définition intuitive.

[41]En termes savants, on dit aussi *variété de dimension 2.*

[42]Attention à ne pas confondre la *surface* de la sphère avec le volume qu'elle renferme (ce volume est une variété de dimension 3, ce n'est bien sûr pas une surface).

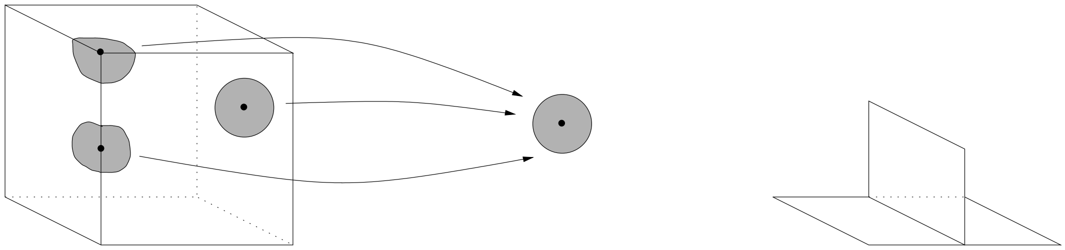


FIG. 14: Un cube, et trois petits morceaux que l'on peut déformer en un disque. Par contre, le dessin de droite n'est pas topologiquement équivalent à un disque.

a. (question optionnelle) Citez des surfaces topologiquement équivalentes à la sphère. Citez des surfaces qui ne sont pas topologiquement équivalentes à la sphère. Combien de sortes topologiques de surfaces connaissez-vous ?

b. Papier et ciseaux Découpez des bandes de papier, et recollez les extrémités de différentes manières : sans demi-tour (on obtient un *anneau*) ; avec un demi-tour (on obtient un *ruban de Möbius*) ; avec deux demi-tours ; avec trois demi-tours.

c. Découpez chacune des surfaces selon le milieu de la bande d'origine (le méridien). Que se passe-t-il ?

III. Triangulations des surfaces, et caractéristique d'Euler-Poincaré

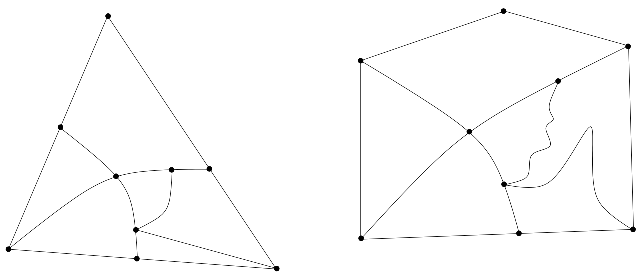


FIG. 15: Deux triangulations topologiquement équivalentes

Une *triangulation* d'un polygône du plan est un dessin comme ceux de la figure 15, constitué d'un certain nombre de *sommets* et d'*arêtes* (éventuellement courbées) reliant les sommets, de manière à ce que si vous découpez selon les arêtes, le plan se retrouve décomposé en "polygônes tordus", c'est-à-dire en morceaux topologiquement équivalent à des polygônes[43]. Ces polygônes topologiques sont appelés *faces* de la triangulation.[44]

Ainsi, les découpages de polygônes (question 3 de la partie précédente) étaient des cas particuliers de triangulations du plan (avec des arêtes non courbées).

Deux triangulations sont considérées comme identiques si on peut passer de l'une à l'autre en déformant continûment le plan. Ainsi, les deux triangulations de la figure 15 sont considérées comme étant les mêmes.

[43]Sauf la partie non bornée.

[44]On devrait peut-être dire *polygonulation* plutôt que triangulation...

On définit de la même manière une triangulation sur la sphère, ou sur une autre surface. Chacun des polyèdres de la première partie définit une triangulation de la sphère, voyez-vous pourquoi ?

Faisons la remarque suivante : *les raisonnements à la fin de la première partie n'utilisaient pas le fait que les arêtes des triangulations n'étaient pas courbées. Par conséquent, le théorème sur les découpages de polygônes se généralise aux triangulations du plan :*

THÉORÈME *(triangulation des polygônes) Pour toute triangulation d'un polygône du plan, le nombre* $S - A + F$ *vaut* 1.

Question 1.

Le but de cette question est de savoir ce que deviennent les résultats de la première partie (concernant le nombre $S - A + F$ pour les polyèdres et les polygônes du plan) pour les autres surfaces.

Pour quelques-unes des surfaces suivantes (au choix), dessiner une triangulation (ou plusieurs), et calculez le nombre $S - A + F$:

– un disque (Remarque : *on l'a déjà fait...*).

– une sphère (Remarque : ça aussi on l'a déjà fait ! !)

– un cylindre ou un anneau[45] (Aide : comment le dessiner de manière agréable dans le plan ? Pensez à ce qu'un topologue a le droit de faire...).

– un ruban de Möbius (Aide : c'est plus facile de dessiner sur la bande de départ qu'après le recollement, en *imaginant* qu'on va recoller la bande ensuite...).

– un tore (Aide : comment le dessiner dans le plan ? Pensez à ce qu'on a fait pour le ruban de Möbius, et aussi aux jeux vidéos du style "PacMan"...)

– un disque avec deux trous[46].

– une bouteille de Klein, un tore avec un trou...

Question 2.

Énoncez les généralisations du théorème de triangulation des polygônes aux surfaces que vous avez étudiées.

Question 3. Application

a. Dire sans calcul ce que vaut le nombre $S - A + F$ pour le polyèdre de la figure 12, puis pour celui de la figure 16.

b. Imaginez que vous êtes un être à deux dimensions, et que vous vivez dans une surface, *sans conscience du monde en trois dimensions dans lequel est plongé la surface*. Dans quelle mesure pouvez-vous dire quelle est la forme de cette surface ? [47]

[45] C'est-à-dire la forme du rouleau de carton autour duquel on enroule du sopalin, que l'on a déjà vue à la question II.2.b.

[46] Cette surface s'appelle un *pantalon* ; voyez-vous pourquoi ?

[47] Si vous n'aimez pas l'idée de vivre en deux dimensions, voici une autre manière de présenter la question. Vous habitez sur une planète, et vous voulez en connaître la forme (est-ce une sphère, un disque, un tore, l'une des quatre surfaces de la question II.2.b, *etc.* ?) ; mais vous ne pouvez pas décoller de la planète, et vous ne voyez rien de l'espace autour (il y a des nuages partout). Comment faire ?

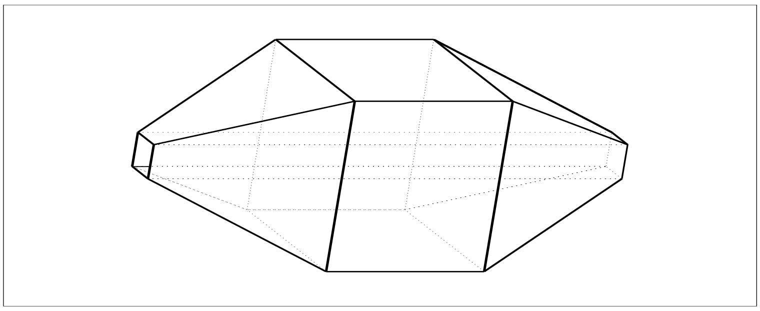


FIG. 16: Quelle est cette surface ?

Question 4. Conclusion

On peut énoncer le théorème suivant (que l'on admettra) :

THÉORÈME *Soit S une surface, et T une triangulation de S. Alors le nombre (S-A+F) ne dépend pas de la triangulation T, il ne dépend que du type topologique de la surface S.*

Ce nombre est donc un *invariant topologique* associé à la surface S ; on l'appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* de la surface.

Donner la caractéristique d'Euler-Poincaré des surfaces que vous avez étudiées.

IV. Un lien avec le point de vue du cours : comment définir formellement l'équivalence topologique ?

Reprenons le dessin d'un carré dans le plan qui se déforme en cercle (figure 17). Étant

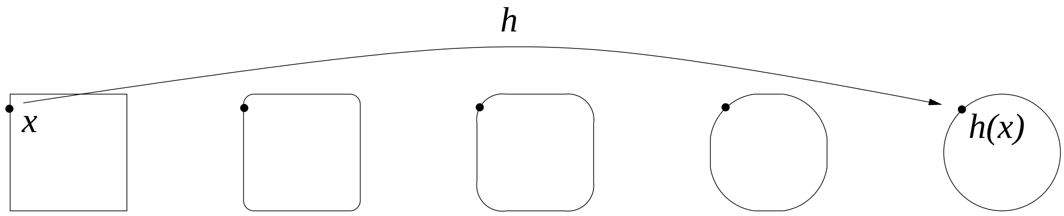


FIG. 17: Construction de l'application h.

donné un point x du carré, on peut suivre son déplacement durant la déformation ; quand la déformation est finie, on obtient ainsi un point $h(x)$ dans le cercle final. En faisant ceci pour chaque point x du carré, on obtient une application h du carré dans le cercle.

Question 1.

Essayez de traduire formellement, *sur l'application h*, les idées intuitives de la définition d'équivalence topologique donnée plus haut :

- comment rendre compte de l'idée qu'il n'y a pas de déchirure ?
- comment rendre compte de l'idée qu'il n'y a pas d'écrasement ?
- coment rendre compte de l'idée qu'il n'y a pas de recollement ?

Sur le plan formel, l'idée de déformation continue est assez lourde à définir ; en réalité, on définit l'équivalence topologique en conservant uniquement les propriétés de la fonction finale h : si E et F sont deux parties du plan (comme le carré et le cercle), elles sont dites topologiquement équivalentes (ou *homéomorphes*) s'il existe une application h de E dans F qui est une bijection, continue, dont la réciproque est continue. Une telle application s'appelle un *homéomorphisme*.

Formellement, la topologie est donc l'étude de toutes les propriétés qui sont conservées par les homéomorphismes. Par exemple, les notions de fermés, d'ouverts, la compacité, la connexité par arcs, sont des notions topologiques (pourquoi ?...).

La topologie ne concerne pas uniquement les parties de $\mathbb{R}^n$: il existe beaucoup d'ensembles sur lesquels on peut mettre des structures topologiques, c'est-à-dire définir des notions d'ouverts et de fermés, et donc de continuité. C'est le cas par exemple des espaces vectoriels de fonctions, ou encore de l'ensemble des courbes du plan ; ceci permet de donner un sens à l'idée de deux fonctions (ou de deux courbes) "proches" l'une de l'autre. Ces différentes structures topologiques jouent un rôle très important en Analyse, par exemple dans la transformation de Fourier, ou dans la théorie des distributions. Explications dans un cours de Licence...

II.15. Introduction aux courbes paramétrées du plan

Source: `courbes-parametrees.tex`.

Version imprimable: `courbes-parametrees.pdf`

Angle pédagogique : *Découverte. Géométrie différentielle*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice propose une introduction aux propriétés géométriques des courbes paramétrées du plan. On suppose ici que les étudiants n'ont eu aucun cours sur le sujet.*

En général, un cours de maths commence par la donnée des définitions des objets que l'on va étudier. Cette manière de faire est évidemment très économique, mais elle est aussi dangereuse, parce que d'un point de vue historique, ces définitions sont en général l'aboutissement d'un long processus de pensée (et certainement pas son commencement).

Pour que les étudiants aient une chance de comprendre le rôle des définitions, il faut, de temps en temps, prendre le temps d'inverser le procédé, en les laissant découvrir le plus possible par eux-même quelques définitions.

Les notions de vitesse, longueur, accélération me semblent particulièrement propices à ce travail, puisqu'il s'agit de notions directement issues du monde physique, sur lesquelles chacun a une idée intuitive.

De plus, il y a un véritable raisonnement *pour aboutir à la définition de la longueur d'une courbe. Bien sûr, il ne s'agit pas d'un raisonnement dans le langage habituel des maths (celui-ci ne peut arriver qu'après que les objets aient été formalisés), mais il s'agit bien d'un type de raisonnement qui fait partie de l'activité mathématique au sens large. Le manque d'habitude de ce type de démarche est d'ailleurs l'une des difficultés rencontrées par les étudiants :*

"M'sieur, comment on peut justifier mathématiquement *que c'est ça la définition ? ?"*

La réponse est qu'on ne peut pas. Par contre, on peut le justifier empiriquement, et aussi en confrontant la version mathématique de la longueur à sa version intuitive, en vérifiant qu'on a bien les propriétés attendues (questions 2.b et 2.c).

Bien sûr, "inventer" la définition de la longueur n'est pas un exercice facile, la résolution de la question 2 peut prendre une heure...

On modélise généralement la trajectoire d'un mobile par la notion de *courbe paramétrée* : il s'agit simplement d'une application (continue...) d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ("le temps") dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathbb{R}^3$. Le but de cet exercice est de définir mathématiquement certaines notions géométriques associées (vitesse, longueur, courbure), et de vérifier que les définitions formelles se comportent de manière conforme à l'intuition.

Question 1. Vitesse

Soit I un intervalle et $c : I \mapsto \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée du plan. On note, pour tout t dans I, $c(t) = (x(t), y(t))$. Comment définiriez-vous la *vitesse* du mobile au temps t ?

Question 2. Longueur

a. Comment définiriez-vous la *longueur* de la trajectoire du mobile ?

b. Testez votre définition en calculant la longueur d'un segment, d'un cercle de rayon r. Montrez en particulier que la longueur du segment ne dépend pas de la vitesse à laquelle on le parcourt (et qu'on trouve bien la même longueur, même si on le parcourt à une vitesse qui n'est pas constante).

c. (optionnel) Le plus court chemin d'un point à un autre... Montrer formellement que toute courbe paramétrée, dans le plan, reliant un point A à un point B, est plus longue que le segment $[AB]$.

Aides : pour simplifier, on peut supposer que $A = (0, 0)$ et $B = (1, 0)$. Comparez la longueur d'une courbe c à celle de la courbe c_0 obtenue en projetant c orthogonalement sur l'axe des x.

d. (optionnel) Longueur d'une portion de graphe Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction ; trouvez la formule donnant la longueur du graphe de f. Vérifiez la formule pour un arc de cercle.

Question 3. Accélération

a. Comment définiriez-vous l'*accélération* du mobile au temps t ?

b. Montrer le résultat suivant : si le mobile se déplace à vitesse constante, alors le vecteur accélération est perpendiculaire à la courbe.

Question 4. Courbure

Soit c une courbe paramétrée, de vitesse constante égale à 1. On définit la *courbure* comme la longueur du vecteur accélération.

(Pour une courbe dont la vitesse n'est pas constante, on commence par reparamétriser la courbe pour avoir une vitesse constante).

a. Calculer la courbure d'un segment, puis d'un cercle de rayon r. Intuitivement, quel lien y a-t-il entre la courbure et l'aspect de la courbe en un point ?

b. On voudrait montrer qu'en un point $c(t_0)$ où la courbure n'est pas nulle, “la courbe est vraiment courbe”, au sens suivant : *pour tous temps t_1 et t_2 assez proches de t_0, les points $c(t_0)$, $c(t_1)$, $c(t_2)$ ne sont pas alignés.*

Aides : On peut simplifier le problème en faisant un changement de variable adapté (= en choisissant un bon repère). Trouver un équivalent (quand t tend vers t_0) de la pente de la droite reliant un point $c(t)$ au point $c(t_0)$.

Autre interprétation géométrique Voyons une autre manière d'interpréter géométriquement la courbure.

Commençons par nous souvenir de la tangente. Soit c une courbe paramétrée (parcourue à vitesse constante), $c(t_0)$ un point de la courbe. Notons $\vec{v}(t_0)$ le vecteur vitesse au point t_0 ; la tangente au point $c(t_0)$ est la droite passant par ce point et dirigée par le vecteur $\vec{v}(t_0)$. On peut montrer que c'est aussi la droite “qui approxime le mieux la courbe au point $c(t_0)$” : plus précisément, c'est la seule droite du plan qui possède un paramétrage $t \mapsto d(t)$ tel que

$$d(d(t), c(t)) = o(t).$$

(la distance entre la droite et la courbe est négligeable devant t).

Revenons maintenant à la courbure. Supposons que la courbure n'est pas nulle, et notons $R(t_0)$ son inverse, qu'on appelle le *rayon de courbure*. Soit $\mathcal{C}_{t_0}$ l'unique cercle tangent à la courbe c au point $c(t_0)$, et de rayon $R(t_0)$; on l'appelle *cercle osculateur*. On peut alors montrer que ce cercle est le cercle qui “approxime le mieux la courbe au point $c(t_0)$ parmi tous les cercles tangents à la courbe en $c(t_0)$” : c'est le seul cercle du plan qui possède un paramétrage $t \mapsto \mathcal{C}(t)$ tel que

$$d(\mathcal{C}(t), c(t)) = o(t^2).$$

On dit aussi que ce cercle est “tangent à la courbe c à l'ordre 2”.

II.16. Les matrices au secours des réseaux

Sources et figures: `matrices_et_reseaux_aeriens/`.

Version imprimable: `matrices_et_reseaux_aeriens.pdf`

Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Le but de ce problème est de faire découvrir les graphes (qui font partie des objets mathématiques les plus simples), et de montrer comment l'algèbre linéaire intervient de manière essentielle dans leur étude (ce qui peut paraître surprenant au premier abord). Le problème choisi, une histoire abracadabrante de réseau aérien, est évidemment à prendre sur le mode ludique plus que comme un exemple d'application concrète... Au passage, on visite les polynômes de matrices, la trigonalisation, et un brin d'arithmétique. Ce problème a été donné en devoir à la maison. Les étudiants l'ont trouvé difficile : notamment, la question portant sur le lien entre le graphe et les matrices (propriété QFTM) a été très peu abordée ; peut-être faudrait-il la rédiger autrement. Mais on a eu l'impression que le problème les* *avait motivés, et qu'ils avaient assez bien compris la démarche globale (ce qui est malheureusement plutôt rare...).*

Références. *Ce problème est adapté de la page Web http://www.cut-the-knot.org, rubrique No 4 "arithmetic and algebra", puis rubrique 125 "When the counting gets tough, the tough counts on mathematics : an airline problem". Il semble provenir de l'étude de certains "groupes de permutations" ; on obtient notamment l'existence du graphe à 50 sommets à partir d'un certain groupe de matrices dont les coefficients appartiennent à un corps ne contenant qu'un nombre fini d'éléments...*

I. Introduction

On considère le problème suivant :

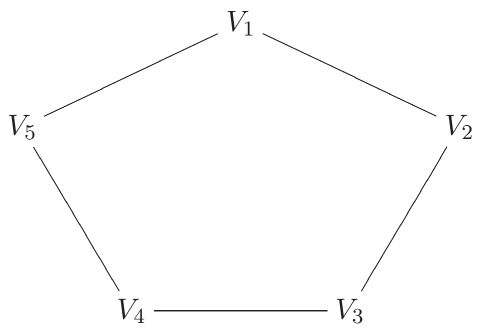
Etant données n villes, on veut mettre en place un réseau aérien entre ces villes satisfaisant les conditions suivantes :

(1) Le nombre de vols directs issus d'une ville donnée est le même pour toutes les villes du réseau ;

(2) Un voyageur qui voudra aller d'une ville donnée à une autre en faisant au plus une escale aura exactement une possibilité d'un tel voyage.

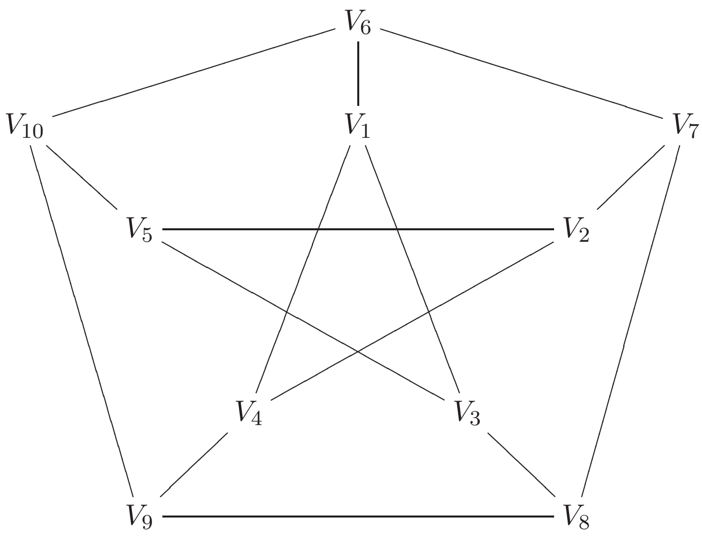
Pour quelles valeurs de n peut-on concevoir un tel réseau ?

– Pour $n = 2$, il y a une solution simple : un vol direct entre les deux villes.
– Pour $n = 3$ ou 4 il n'existe pas de réseau satisfaisant ces conditions.
– Pour $n = 5$ une solution est donnée par le graphe suivant :



Ici le nombre de vols issus d'une ville donnée est égal à 2 quelle que soit la ville du réseau, donc la première condition est bien vérifiée ; et entre deux villes il y a soit un vol direct, soit un vol avec une escale, mais pas les deux, et la deuxième condition est également satisfaite.

– Il n'y a pas non plus de solution pour $n = 6$, 7, 8, ou 9. Par contre il y a une solution pour $n = 10$, réalisée par le graphe suivant :



On peut ici aussi vérifier que les deux conditions sont remplies, bien que ce soit un peu plus long (on admettra ceci dans la suite).

La modélisation mathématique du réseau aérien est un objet appelé *graphe* : un graphe est constitué d'un ensemble de sommets $\mathcal{S} = \{V_1, \cdots, V_n\}$ et d'un ensemble d'arêtes entre certains des sommets (de manière précise, une arête est un sous-ensemble de $\mathcal{S}$ à deux éléments, ces deux éléments sont appelés *extrémités* de l'arête). Par exemple, le premier graphe a pour sommets $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ et pour arêtes $\{\{V_1, V_2\}, \{V_2, V_3\}, \{V_3, V_4\}, \{V_4, V_5\}, \{V_5, V_1\}\}$.

On doit aussi définir ce qu'est un *chemin* : c'est une suite finie de sommets du graphe dans laquelle deux sommets successifs sont reliés par une arête dans le graphe : par exemple, toujours dans le premier graphe, (V_1) , (V_1, V_2) , $(V_3, V_2, V_1, V_2, V_3, V_4)$ sont trois chemins de longueur respective 1, 2 et 6 (la *longueur* du chemin est le nombre d'arêtes parcourues, autrement dit le nombre d'éléments de la suite moins 1).

Voici la stratégie proposée : dans toute la suite du problème, on suppose qu'on a un entier n et un graphe $\mathcal{G}$ à n sommets vérifiant les hypothèses suivantes (formalisation des hypothèses (1) et (2) du problème de l'introduction) :
(H1) il existe un entier k tel que pour tout sommet V_i du graphe, le nombre d'arêtes dont V_i est une extrémité est égal à k.
(H2) pour tout couple de sommets *distincts* V_i et V_j du graphe, il existe un et un seul chemin allant de V_i à V_j qui soit de longueur 1 ou 2.
Nous allons chercher à exploiter les deux hypothèses pour montrer que n ne peut prendre que quelques valeurs (par exemple, on va montrer que n ne peut pas être égal à 3, 4, 6, 7, 8, ou 9, comme on l'a affirmé dans l'introduction).

II. Liens avec les matrices

Soit A la *matrice d'incidence* du graphe, qui indique les liaisons entre les villes : A est la matrice carrée, de taille n, dans laquelle on a mis un 1 à la case i, j si il y a une arête entre V_i et V_j, et un 0 sinon.

Montrer que la matrice A est symétrique (c'est-à-dire égale à sa transposée).

Question 1. Compter le nombre de chemins

Le but de cette question est de comprendre et de montrer la propriété suivante[48] :

Propriété QFTM (Qui Fait Tout Marcher) *L'entrée i, j de la matrice A^d est égale au nombre de chemins de longueur d entre V_i et V_j.*

a. Un exemple pour comprendre Ecrire la matrice d'incidence M du graphe à 5 sommets dessiné dans l'introduction. Calculer M^2 ; quels sont les 2 chemins de longueur 2 de V_1 à V_1 ? Calculer M^3 et tester également la propriété QFTM sur quelque cases de M^3 (quels sont les 3 chemins de V_1 à V_2 ? etc...).

b. Preuve Montrer la propriété QFTM par récurrence sur d (on pourra commencer par traiter le cas $d = 2$, mais ça n'est pas obligatoire).

III. Application à notre problème.

Question 1.

Comment se traduit la propriété (H1) sur la matrice A ? On appelle (P1) cette propriété matricielle.

Question 2.

Montrer que la propriété (H2) entraîne l'égalité matricielle :

$$A^2 + A - (k-1)I = J \qquad (P2)$$

où I est la matrice identité et J la matrice ne contenant que des 1.

IV. Où l'on utilise la valeur propre la plus simple

Question 1. Un lien entre les valeurs propres de A et celle de J

Soit λ une valeur propre de A ; montrer que $\lambda^2 + \lambda - (k-1)$ est une valeur propre de J.

Question 2. Utilisation

Trouver une valeur propre et un vecteur propre[49] de A en utilisant la propriété (P1). En déduire la relation :

$$n = k^2 + 1.$$

Résoudre le problème pour $n \leq 16$, c'est-à-dire dire pour chacun des entiers de 1 à 16 s'il existe ou non un réseau aérien vérifiant les deux conditions.

Donner aussi quelques valeurs de n pour lesquelles on ne peut pas conclure pour l'instant. Combien reste-t-il d'entiers pour lesquels on ne peut pas encore conclure ?

[48] C'est une propriété générale des graphes, c'est-à-dire qu'elle n'utilise pas les hypothèses (H1) et (H2).
[49] Pour les profs : faut-il leut donner le vecteur propre ? ? ?

V. Où les autres valeurs propres ont aussi leur mot à dire

Question 1. Valeurs propres de J...

Trouver les valeurs propres de J et leurs multiplicités (remarque : on peut le faire sans calcul !).

Question 2. ...et de A

Montrer que A possède au plus 3 valeurs propres distinctes : k mise à part, on notera les deux autres λ_+ et λ_-, et m_+ et m_- leur multiplicité respective.

Question 3. Multiplicité de k

Montrer que le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(A - kI)$ est de dimension 1. Peut-on en déduire la multiplicité de k ? Montrer que k est de multiplicité 1 en admettant (provisoirement) le lemme suivant :

Lemme 1 *La multiplicité de λ comme valeur propre de M est égale à la multiplicité de $P(\lambda)$ comme valeur propre de $P(M)$, où M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et P un polynôme, par exemple le polynôme $X^2 + X - (k-1)$.*

Question 4. Relations

Trouver deux relations reliant m_+, m_- et k (indications : utiliser la question précédente, et la trace). Montrer notamment que $(m_+ - m_-)\sqrt{4k-3} = k^2 - 2k$.

VI. On y est presque !

Question 1. Le cas simple

On suppose que $m_+ = m_-$. Trouver les valeurs possibles de k, puis de n.

On suppose dans la suite que $m_+ \neq m_-$.

Question 2. Où l'on voit que $4k-3$ est un carré parfait.

Un *carré parfait* est un entier de la forme p^2, où p est un autre entier. En utilisant le lemme suivant :

Lemme 2 *Soit b un entier ; si b n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.*

montrer que $4k - 3$ est un carré parfait (propriété *). *En déduire que n ne peut pas être égal à* 17.

Question 3. Astuce et arithmétique

Soit p tel que $p^2 = 4k - 3$. Montrer que $4k - 3$ divise $4^4 \times (k^2 - 2k)^2$. Trouver un polynôme Q tel que $Q(4k) = 4^4 \times (k^2 - 2k)^2$. En déduire que $p^2 = 4k - 3$ divise $Q(3)$. Autrement dit :

$$\mathbf{4k - 3 \text{ divise } 225 \text{ (propriété **)}} \; .$$

Montrer rapidement qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers n répondant au problème initial.

Trouver tous les k vérifiant les propriétés (*) et (**).

Question 4. Conclusion

On admet que $n = 3250$ est impossible[50], mais que par contre il existe un graphe vérifiant (H1) et (H2) avec 50 sommets. *Résoudre totalement le problème.*

VII. Les lemmes

Question 1.

Montrer le lemme 1 : on peut commencer par le cas d'une matrice triangulaire T, et chercher le lien entre les éléments de la diagonale de T et ceux de $P(T)$. Pour le cas général, utiliser le fait que M est trigonalisable.

Question 2.

Montrer le lemme 2 en vous inspirant de la preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

VIII. Question subsidiaire

Proposer une méthode pour s'assurer du fait que le graphe à 10 sommets dessiné en introduction a les propriétés voulues.

II.17. Manipulation du Signe Somme

Source: `signe-somme.tex`.

Version imprimable: `signe-somme.pdf`

Angle pédagogique : *Langage. Séries*

Objectifs et commentaires. *Décomplexer les étudiants face à ce signe nouveau. Les faire réfléchir sur les variables locales (on dit parfois "muettes") et globales, et sur les changements d'indice. Ces exercices semblent être un préliminaire indispensable à l'étude des séries, d'autant plus qu'ils posent de réels problèmes aux étudiants.*

Suggestion : l'idéal serait que les étudiants s'approprient vraiment ce symbole. Pour ça, un moyen consiste à leur faire inventer des formules l'utilisant... Exercice à compléter !

Question 1 : écriture avec ou sans signe $\sum$.

a. Ecrire sans $\sum$:

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n, \quad \sum_{p=1}^{n} p, \quad \sum_{p=1}^{n} n, \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{p}$$

b. Ecrire avec $\sum$:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

[50]La preuve se trouve dans l'article de M. Aschbacher, *The non-existence of rank three permutation groups of degree 3250 and subdegree 57*, J. Algebra 19 (**1971**), 538-540.

Question 2 : variables de comptage. Les égalités suivantes sont-elles vraies :

$$\sum_{p=1}^{n}(p\times n)=\sum_{k=1}^{n}(k\times n)=n\times\sum_{k=1}^{n}k=k\times\sum_{k=1}^{n}n$$

Question 3 : substitution. Soit

$$S_n=\sum_{p=1}^{2n^2}\frac{1}{\sqrt{p}}.$$

c. Combien y a-t-il de termes dans cette somme ?

d. Ecrire la somme S_{2n}. Combien contient-elle de termes ?

e. Soit S_{2n}^{impair} la somme des termes de S_{2n} d'ordre impair (obtenus pour p=1, 3, 5, ...). On définit de même S_{2n}^{pair} ; on a donc $S_{2n}=S_{2n}^{\text{impair}}+S_{2n}^{\text{pair}}$. Ecrire les sommes S_{2n}^{pair} et S_{2n}^{impair}.

Question 4. Calculez les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}p,\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}k,\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}n.$$

Question 5. Soit

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+N}.$$

De quelle série est-ce la somme partielle ?

II.18. Matrice d'inertie d'un solide

Source: `moment_d_inertie.tex`.
Version imprimable: `moment_d_inertie.pdf`
Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Faire remarquer que la matrice d'inertie utilisée en mécanique du solide est une forme quadratique. L'exitence de symétries du solide se traduit par des conditions sur la matrice d'inertie. C'est une application concrète de la formule du changement de bases.*

Soit S un solide et O une origine (par exemple, mais pas forcément, son centre de gravité). Lorsqu'on fait tourner S le long d'un axe d passant par O avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$, la vitesse instantanée d'un point M du solide est donnée par $\vec{\omega}\wedge \vec{OM}$. Son énergie cinétique est donc donnée par

$$E_c(\vec{\omega})=\iiint_S \frac{1}{2}(\vec{\omega}\wedge \vec{OM})^2dm$$

où dm représente l'élément de masse.

a. Démontrer que l'origine étant fixée, E_c est une forme quadratique en $\vec{\omega}$. Sa matrice dans une base donnée s'appelle la matrice d'inertie de S.

Remarque. Par définition, les axes principaux sont des axes de diagonalisation simultanée de la forme quadratique d'inertie et du produit scalaire.

b. La matrice d'inertie d'un solide peut-elle etre égale à $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$?

c. La matrice d'inertie d'un solide peut-elle etre égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$?

d. Comment se transforme la matrice d'inertie d'un solide lorsqu'on transforme le solide S en son symétrique par rapport au plan (xOy) ?

e. Calculer (en utilisant les symétries pour réduire les calculs) la matrice d'inertie du parallélépipède $\{(x, y, z)| - a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c\}$.

II.19. Modélisation de l'évolution d'une population

Source: `modelisation-de-population.tex`.

Version imprimable: `modelisation-de-population.pdf`

Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Voir comment les suites récurrentes linéaires fournissent le modèle le plus simple d'évolution de la population.*

Proposez un modèle mathématique (linéaire) décrivant l'évolution de la population d'un pays d'année en année, que l'on pourrait par exemple programmer sur un ordinateur (on demande de décrire des "équations d'évolution", mais pas de les résoudre !). Vous disposez pour cela :

– de la répartition de la population, en l'an 2000, en tranches d'âge d'une année ;
– des taux de mortalité dans chaque tranche d'âge ;
– du taux de fécondité des femmes de chaque tranche d'âge (c'est-à-dire du nombre d'enfants qui naîtront dans l'année pour cent femmes ayant cet ace).

Quels sont les qualités et les défauts du modèle ?

II.20. Moindres carrés.

Source: `moindres_carres.tex`.

Version imprimable: `moindres_carres.pdf`

Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Faire retrouver à l'étudiant la méthode des moindres carrés sur un exemple.*

Considérons le système

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 & = & 3 \\ -2x_1 + 3x_2 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 & = & 2 \end{cases}$$

a. Montrer que ce système n'a pas de solution

Ce système s'écrit aussi $A.X = b$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On cherche alors à trouver la meilleure solution approchée, c'est à dire X_0 tel que $||A.X_0 - b||^2$ soit minimal (où ——.—— est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$).

b. Démontrer que X_0 réalise le minimum de la fonction $||A.X - b||^2$ si et seulement si $A.X_0 - b$ est orthogonal à Im A.

c. Trouver la meilleure solution approchée du système (S).

d. Pour un système $A.X = b$ quelconque, donner un système d'équations dont les solutions sont les meilleures solutions approchées du système original.

Cette méthode pour trouver une solution approchée s'appelle la méthode des moindres carrés. Elle est très utilisée en sciences expérimentales, par exemple pour trouver des coefficients d'une application affine passant le plus près possible de valeurs expérimentales.

e. Etant donnés une série de points expérimentaux (x_n, y_n), on cherche la fonction affine $y = ax + b$ qui approxime le mieux les points expérimentaux. Déterminer un système d'équations dont les solutions sont les coefficients a et b de la fonction affine cherchée.

II.21. Paradoxe de Zenon

Sources et figures: `zenon/`.

Version imprimable: `zenon.pdf`

Angle pédagogique : *Visualisation. Séries*

Objectifs et commentaires. *Zénon d'Élée prouvait l'impossibilité du mouvement par son fameux paradoxe. L'existence de séries convergentes n'est pas une évidence, et les visualiser comme inscrites dans le temps peut aider à s'en faire une représentation. L'exercice est peut-être bien adapté pour être traité en groupe (je ne l'ai pas testé).*

Question 1. Paradoxe de Zénon.

Le paradoxe suivant a été imaginé par Zénon d'Élée (490-430 Avant JC). Achille fait une course avec la tortue. Il part 100 mètres derrière la tortue, mais il va dix fois plus vite qu'elle. Quand Achille arrive au point de départ de la tortue, la tortue a parcouru 10 mètres. Pendant qu'Achille parcourt ces 10m, la tortue a avancé d'un mètre. Pendant qu'Achille parcourt ce mètre, la tortue a avancé de 10cm... Puisqu'on peut réitérer ce raisonnement à l'infini, Zénon conclut qu'Achille ne peut pas dépasser la tortue.

Comment peut-on dépasser ce paradoxe ?

Question 2. Une bille qui rebondit.[51]

a. Une balle part d'une certaine hauteur h_0 au dessus du sol (sans vitesse initiale). Combien de temps met elle pour arriver sur le sol (négliger les frottements) ? Quelle est son énergie cinétique lorsqu'elle arrive au niveau du sol ?

b. On modélise le rebond de la façon suivante : lorsque la balle rebondit elle perd une certaine proportion p de son énergie cinétique (par exemple $p = 10\%$). Etant partie de la hauteur h_0, A quelle hauteur h_1 va-t-elle remonter ? Quelle est la durée t_0 entre les deux premiers rebonds ?

c. Combien de fois la balle rebondit-elle ? Pendant combien de temps rebondit-elle ?

Question subsidiaire. Vous connaissez le bruit d'une bille qui rebondit, avec des rebonds de plus en plus rapprochés. Imaginez maintenant une balle qui rebondit, non plus selon le modèle ci-dessus, mais selon un autre loi. Par exemple la durée du n-ième rebond est donné par $1/n$. Que va-t-on entendre ? Voir `http://matexo.emath.fr/exemaalt/exos_individuels/tex/zenon/sons` pour *écouter rebondir des séries.*

Question 3. La mouche et les trains

Deux trains partent simulanément, et à une même vitesse constante v. Le premier va de Paris à Marseille, et le second, de Marseille à Paris.

Une mouche part simultanément de Paris à vitesse $3v$ (elle suit les rails en direction de Marseille). Lorsqu'elle rencontre le train Marseille-Paris, elle fait demi-tour vers Paris. Lorsqu'elle rencontre le train Paris-Marseille, elle fait demi-tour et de dirige à nouveau vers Marseille, etc. Elle s'arrête lorsque les trains se croisent.

a. Faire un dessin dans l'espace-temps (la position en abscisse, par exemple, le temps en ordonnée)

b. Combien de fois la mouche fait elle demi-tour ?

c. Quelle est la longueur de chaque trajet ?

[51] amener une vraie bille de verre ou métallique (qui rebondit bien et de maniere sonore) en TD pour faire l'expérience !

d. Quelle distance parcourt-t-elle en tout ?

II.22. Problème de *fit* (moindres carrés).

Source: `probleme_de_fit.tex`.
Version imprimable: `probleme_de_fit.pdf`
Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Faire retrouver à l'étudiant la méthode des moindres carrés sur un exemple. Beaucoup d'étudiants ont du mal à travailler dans l'espace de dimension 4 et n'arrivent pas à se détacher du dessin (plan) fait dans la première question. Ce genre de problème peut aussi amener les étudiants à comprendre que, pour modéliser des situations concrètes, il faut parfois se placer dans des espaces de dimension plus grande que 3.*

Vous avez une batterie. Vous voulez déterminer ses caractéristiques : force électromotrice E et résistance interne r. Cela signifie que vous cherchez à modéliser cette batterie par un dipole tel que $U = E - rI$ (où U est la différence de potentiel entre les deux bornes du dipole, et I est l'intensité le traversant).

Vous faites donc une série de mesures. Vous trouvez les résultats suivants :

Mesure N°	1	2	3	4
Intensité mesurée (A)	0	0,1	0,4	1
Tension mesurée (V)	12	11	7	1

a. Faire un dessin. Peut-on trouver E et r de sorte que le modele soit exact ? Donner une justification géométrique.

b. On pose $X = \begin{pmatrix} E \\ r \end{pmatrix}$. Écrire les équations qui doivent être satisfaites par E et r (pour que le modèle soit exact) sous la forme $A.X = b$ où A est une matrice, et b un vecteur. Donner une justification algébrique de la question précédente.

c. On cherche donc E et r (c'est à dire X) de sorte que le modèle soit *le meilleur possible* vis à vis des données disponibles. Pour nous, *le meilleur modèle possible* sera celui pour lequel $||AX - b||^2$ est minimum. (On aurait pu choisir une autre définition, mais celle-là est la plus simple à résoudre. On l'appelle souvent : *les moindres carrés*.) Expliciter la valeur de $||AX - b||^2$ et traduire plus concrètement la condition des moindres carrés.

d. Démontrer que X_0 réalise le minimum de la fonction $X \mapsto ||A.X - b||^2$ si et seulement si $A.X_0 - b$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\, A$.

e. Montrer que $(\mathrm{Im}\, A)^\perp = \ker {}^tA$.

f. En déduire l'unique vecteur $Y \in \mathrm{Im}\, A$ tel que $||Y - b||^2$ soit minimum.

g. Trouver la meilleure solution approchée du système.

h. Autre probleme de fit. Maintenant vous avez un échantillon formé de trois composés radioactifs A, B, C (et d'autres composés non radioactifs). Vous connaissez leurs demi-vies : par exemple $\tau_A = 1$ jours, $\tau_B = 3$ jours et $\tau_C = 10$ jours. On cherche à déterminer la composition initiale de l'échantillon. Le nombre de désintégrations par seconde de A s'écrit donc $d_A = N_A 2^{-t/tau_A}$ où N_A est le nombre initial d'atomes A. Vous mesurez le nombre de désintégrations par seconde dans l'échantillon (avec un compteur Geiger) au cours du temps. **Question :** trouver les valeurs de N_A, N_B et N_C qui correspondent le mieux aux mesures effectuées.

Temps (jours)	0	1	2	3	4
Nombre de désintégrations par secondes ($\times 10^9$)	10	2,7	1,3	0,6	0,3

II.23. Quizzes d'algébre linéaire

Source: `quizzes_alglin.tex`.

Version imprimable: `quizzes_alglin.pdf`

Angle pédagogique : *Quizz. Algèbre linéaire*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Comment faire en sorte que les étudiants apprennent leur cours ? Le but de ces petits exercices est de donner des petites questions aux étudiants pour les aider à travailler le cours de manière active, en se posant des questions.*

La méthode utilisée pour poser ces quizzes, inspirée par Myriam Deschamps à Orsay, est la suivante : Le quizz est distribué aux étudiants à l'avance. Ensuite, à une date convenue à l'avance, on distribue 3 questions extraites de ce quizz. Les étudiants ont un quart d'heure pour y répondre.

Cette méthode a l'avantage d'être bien acceptée par les étudiants (en général, ils jouent le jeu et travaillent ces questions) et de les aider à aborder le cours.

Ces quizzes ont été donnés à des étudiants de DEUG SMa, pour un module traitant des déterminants, diagonalisation des endomorphismes, formes quadratiques et diagonalisation des matrices symétriques.

I. Quizz de rappels

Répondre par OUI ou par NON aux questions suivantes et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple, selon le cas. Dans ce qui suivra, E est un K-espace vectoriel et $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(1). — Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $Vect(u, v) = Vect(u + v, u - v)$.

(2). — Les nombres complexes $1 + i$ et $1 - i$ engendrent $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(3). — Il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $Vect(u) = \mathbb{R}^2$.

(4). — Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $F + H = G + H$. Alors $F = G$.

(5). — Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, alors $F + (-F) = \{0\}$, où $-F := \{-x \,|\, x \in F\}$.

(6). — $\{\lambda(X^2 + i),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$.

(7). — $(1, 0, 0) + Vect\{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(8). — Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs deux à deux non-colinéaires. Alors ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

(9). — L'ensemble des solutions (x, y, z) du système linéaire $\left\{\begin{array}{rcl} x - y - z & = & 0 \\ 2x - 3y + z & = & 0 \end{array}\right.$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(10). — L'ensemble des solutions (x, y, z, t) du système linéaire $\left\{\begin{array}{rcl} x - y - z + t & = & 1 \\ 2x - 3y + z + t & = & 0 \end{array}\right.$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(11). — Soit A une partie non-vide de E. Il existe un sous-espace vectoriel de E contenant A.

(12). — $\mathbb{Z}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(13). — $\{0\}$ et $\emptyset$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$.

(14). — Un système d'équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(10, 12, 15)$ est donné par

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x - 2z & = & 0 \\ -3x + 5y - 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

(15). — Le système en x, y, z, t suivant admet trois variables principales :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y - z + 3t & = & 5 \\ 2x - y - 4z + 9t & = & 16 \\ x - 4z + 5t & = & 15 \\ x - y - 7z + 7t & = & 25 \end{array}\right.$$

(16). — Une matrice ayant des entrées non-nulles ne peut pas se transformer en une matrice ayant toutes les entrées nulles, par une suite finie d'opérations élémentaires sur ses lignes.

(17). — La direction de la droite affine $\{(1 + 3t, 4 + 5t, -1 - t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ est donnée par le vecteur $(1, 4, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(18). — Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $(F+G) \cup F$ est un sous-espace vectoriel de E.

(19). — Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, non tous nuls. L'équation linéaire $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ admet une et une seule inconnue principale.

(20). — On utilise les mêmes notations que pour la question 19. L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ est un sous-espace vectoriel engendré par $n-1$ vecteurs.

II. Quizz sur les déterminants

Dans ce qui suit, toutes les matrices considérées sont des matrices carrées.

(1). — Soit M' la matrice obtenue à partir d'une matrice M par l'opération $L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$. Alors $\det(M) = \det(M')$.

(2). — Si deux systèmes d'équations linéaires homogènes ont le même déterminant, alors les espaces de solutions des deux systèmes ont la même dimension.

(3). — Quelles que soient A, B deux matrices d'ordre n, on a $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

(4). — Supposons que M et M' sont deux matrices carrées telles qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = M'X$. Peut-on en déduire que $\det(M) = \det(M')$.

(5). — S'il existe $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = M'X$, peut-on en déduire que $\det(M - M') = 0$.

(6). — $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \det(\lambda M) = \lambda \det(M)$

(7). — Pour tous $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, on a $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3 ..., v_n) = \det_{\mathcal{B}}(v_1 - v_2, v_2 - v_1, v_3, ..., v_n)$

(8). — Si E est un espace vectoriel de dimension 4, alors quels que soient $v_1, v_2 \in E$, on a $\det_{\mathcal{B}}(v_1 - v_2, 3v_1 + 5v_2, 2v_1 - 4v_2, 7v_1 - 3v_2) = 0$.

(9). — L'équation en $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1 + xv, v_2, ..., v_n) = 0$$

possède une unique solution si et seulement si v n'appartient pas à l'espace vectoriel engendré par $v_2, ..., v_n$.

(10). — Si $\forall v \in E, \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v) = 0$, alors $(v_1, ..., v_{n-1})$ est liée.

(11). — Supposons $n = 3$. Alors $\det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = \det_{\mathcal{B}}(v_2, v_3, v_1)$

(12). — Soit v un vecteur d'un espace vectoriel E de dimension n. Si $\det(v_1 + v, v_2, ..., v_n) = \det(v_1, ..., v_n)$, alors $v \in vect(v_2, .., v_n)$.

(13). — Si le déterminant d'une famille de n vecteurs de E est nul dans une base donnée, alors il est nul dans n'importe quelle base.

(14). — Si le déterminant d'une famille de n vecteurs de E est positif dans une base donnée, alors il est positif dans n'importe quelle base.

(15). — Si le déterminant d'une application linéaire est positif dans une base donnée, alors il est positif dans n'importe quelle base.

(16). — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Si $\det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = 0$ est nul quels que soit la famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$, alors $\det f = 0$.

(17). — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Si il existe une famille de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ tels que $\det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = 0$ alors $\det f = 0$.

(18). — Le déterminant d'une projection dans $\mathbb{R}^3$ est toujours égal à 1.

(19). — Le déterminant d'une symétrie est toujours égal à 1 ou -1.

(20). — Le déterminant d'une homothétie de $\mathbb{R}^4$ est toujours positif.

III. Quizz sur diagonalisation des endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension n, T et T' des endomorphismes de E, A, B, P des matrices carrées $n \times n$.

(1). — Un endomorphisme ayant une valeur propre non nulle est toujours inversible.

(2). — Si un endomorphisme n'a pas de valeur propre, alors il est inversible.

(3). — Si $T : E \to E$ n'a pas de valeur propre, T ne peut pas être diagonalisable. (question subsidiaire : et si T en a une seule ?)

(4). — Soit $T : E \to E$ l'homothétie de rapport λ (par définition, pour tout $v \in E$, $T(v) = \lambda v$). Y-a-t-il des bases dans lesquelles la matrice de T n'est pas diagonale ?

(5). — Si T est diagonalisable, sa matrice est diagonale dans n'importe quelle base.

(6). — Si λ est valeur propre de T, alors λ^n est valeur propre de T^n.

(7). — Si λ est valeur propre de T et μ valeur propre de T' alors $\lambda + \mu$ est valeur propre de $T + T'$

(8). — Si λ est valeur propre de T et μ valeur propre de T' alors $\lambda\mu$ est valeur propre de $T \circ T'$

(9). — Si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 3\lambda + 1$ est valeur propre de $A^2 + 3A + \mathrm{I_n}$.

(10). — Si T est diagonalisable, alors T^2 est forcément diagonalisable

(11). — Si T^2 est diagonalisable alors T est forcément diagonalisable

(12). — Si A est diagonalisable alors pour toute matrice P inversible, AP est diagonalisable

(13). — Si A est diagonalisable alors pour toute matrice P inversible, PAP^{-1} est diagonalisable

(14). — Si A est diagonalisable et si $A^2 = 0$ alors $A = 0$.

(15). — Soit f un endomorphisme de E, soit A la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ et A' la matrice de f dans une base $\mathcal{B}'$. Alors A et A' ont les mêmes valeurs propres.

(16). — Avec les notations au dessus, A et A' ont les mêmes vecteurs propres.

(17). — Supposons que T et T' sont diagonalisables. Si T et T' ont les mêmes espaces propres, alors $TT' = T'T$.

(18). — Soit v un vecteur propre de T de valeur propre non nulle. Alors $T(v)$ est un vecteur propre de T.

(19). — Supposons qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que $Mat_{B,B'}(T)$ soit diagonale. Alors T est diagonalisable.

(20). — Soit A une matrice diagonalisable. Alors, l'application de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $T(X) = A.X$ est diagonalisable.

IV. Quizz sur les formes quadratiques

(1). — Le noyau d'une forme quadratique est un espace vectoriel.

(2). — La somme de deux vecteurs isotropes est un vecteur isotrope.

(3). — Si $q(v_1) > 0$ et $q(v_2) > 0$ alors $q(v_1 + v_2) > 0$.

(4). — Supposons que q n'a pas de vecteur isotrope. Alors q ou $-q$ est un produit scalaire.

(5). — Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et sur d_2. Alors q est définie positive.

(6). — Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et définie négative sur d_2. Alors q est de signature $(1, 1)$.

(7). — La somme de deux formes quadratiques définies positives est définie positive.

(8). — La somme de deux formes quadratiques de signature $(1, 1)$ est une forme quadratique de signature $(1, 1)$.

(9). — Une forme quadratique bornée est nulle

(10). — Si f et g sont deux formes linéaires, alors $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire.

(11). — Le produit de deux formes bilinéaires est une forme bilinéaire.

(12). — Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors $(x, y) \mapsto f(x)f(y)$ est un produit scalaire.

(13). — Soient q et q' deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ ayant la même signature. Alors il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que $Mat_{\mathcal{B}}(q) = Mat_{\mathcal{B}'}(q')$.

(14). — Soient q et q' deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ telles qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ avec $Mat_{\mathcal{B}}(q) = Mat_{\mathcal{B}'}(q')$. Alors q et q' ont la même signature.

(15). — La signature de la forme quadratique $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ sur $\mathbb{R}^3$ est $(3, 0)$.

(16). — Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors le déterminant de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.

(17). — Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors le rang de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.

(18). — Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors la trace sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.

(19). — Soit T un automorphisme de E, q une forme quadratique, et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit A la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$, et Q la matrice de q dans cette même base.

Alors la matrice de la forme quadratique $q \circ T$ dans la base $\mathcal{B}$ est égale à QA.

(20). — Avec les notations au dessus, la signature de q est égale à celle de $q \circ T$.

II.24. Saute-mouton

Source: `Saute-moutons.tex`.

Version imprimable: `Saute-moutons.pdf`

Angle pédagogique : *Ludique. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires.

Cet exercice conduit à des suites récurrentes linéaires en dimension 3*. Sous cette forme, il demande de l'autonomie (mettre en forme, résoudre, interpréter la réponse). La réponse est amusante.* [52]

Trois moutons sont dans un pré, et bien évidemment, ils jouent à saute-mouton. Le premier mouton saute par dessus le deuxième, et se retrouve donc dans la position symétrique de la position qu'il occupait par rapport au deuxième mouton. Puis le deuxième mouton saute au-dessus du troisième. Enfin, le troisième saute au-dessus du premier (qui, rappelons-le, a déjà bougé). Et le jeu recommence indéfiniment...

En assimilant le pré à un plan et les moutons à des points du plan, trouver les configurations de départ qui entraîne une partie de saute-mouton pouvant se dérouler entièrement dans un champ, c'est-à-dire tel que la suite des positions successives des trois moutons reste bornée dans le plan.

II.25. Symétries des cristaux.

Sources et figures: `cristaux/`.

Version imprimable: `cristaux.pdf`

Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice permet de comprendre un joli résultat de cristallographie. Il fait appel aux changements de bases (les étudiants sont souvent gênés par le fait que deux bases puissent donner le même réseau).*

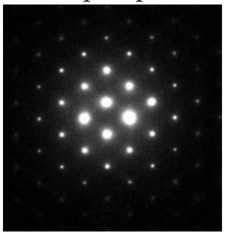
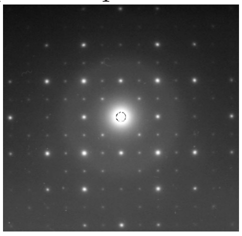
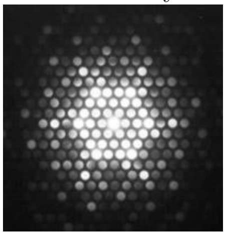
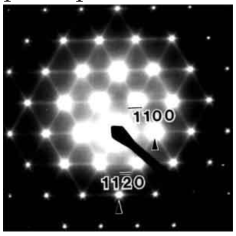
Un des résultats majeurs de la cristallographie est que ¡¡ l'ordre de symétrie ¿¿ d'un cristal ne peut être égal qu'à $1, 2, 3, 4$ ou 6. Qu'est-ce que c'est que ¡¡ l'ordre de symétrie ¿¿ d'un cristal ? L'ordre d'une rotation f est le plus petit entier $n > 0$ tel que $f^n = Id$. L'ordre de symétrie d'un cristal est l'ordre maximal d'une rotation qui préserve le cristal.

L'ordre de symétrie du cristal est une donnée importante car pour étudier un cristal, on regarde le spectre de diffraction d'un faisceau de rayons X qui traverse le cristal (ce spectre ressemble en général à un ensemble de points lumineux situés sur un réseau et

[52] La matrice correspondante a trois valeurs propres réelles, dont une seule est de valeur absolue strictement plus grande que 1. Le sous-espace de dimension (complexe) 2 solution du problème correspond aux configurations où les trois points sont alignés, avec un rapport de distance égale au nombre d'or...

dont l'intensité lumineuse décroit avec la distance à l'origine, voir figures), et l'ordre de symétrie du cristal peut se lire dans l'ordre de symétrie du spectre de diffraction.

Voici quelques exemples de spectres de diffraction de rayons X qu'on peut obtenir :

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat de cristallographie ci-dessus pour des cristaux bidimensionnels (le résultat se démontre de la même façon pour les cristaux tridimensionels, mais il faut quelques connaissances sur les rotations de $\mathbb{R}^3$. Par contre l'ordre de symétrie peut aussi prendre les valeurs $5, 8$ et 12 en dimension 4 ou 5, et d'autres valeurs au fur et à mesure que la dimension augmente...)

On modélise un cristal bidimensionnel par l'ensemble des points de coordonnées entières (positives ou négatives) dans une certaine base $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan.

a. Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base orthonormée. Faire des dessins des cristaux correspondant aux bases suivantes :

$$(\vec{u} = \vec{\imath}, \vec{v} = \vec{\jmath}), (\vec{u} = \vec{\imath}, \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\jmath}), (\vec{u} = \vec{\imath}, \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}), (\vec{u} = \vec{\imath}, \vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath})$$

Trouver sur le dessin les rotations qui laissent invariants ces cristaux et donner l'ordre symétrie de ces cristaux.

b. Soit f une application linéaire qui préserve un cristal C. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est à coefficients entiers.

c. Sachant qu'une rotation d'angle $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ admet pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe, montrer, en utilisant la trace que l'angle d'une rotation qui préserve un cristal apparaît forcément dans la liste $\theta \in \{0, \pi, \pm\pi/2, \pm 2\pi/3, \pm\pi/2, \pm\pi/3\}$. En déduire le résultat de cristallographie.

En particulier, un cristal bidimensionel ne peut pas être invariant par une rotation d'ordre 5. En dimension 4 et 5, la liste des ordres de symétries possibles s'agrandit et contient $5, 8, 12$. Dans les les années 80, on a trouvé certains matériaux ayant un ordre de symétrie égal à 5, qu'on appelle dorénavant des quasi-cristaux. Un des modèles de quasi-cristaux est la projection d'une tranche d'un *réseau* (i. e. l'ensemble des points à coordonnées entières dans une base) de dimension 4 ou plus dans l'espace de dimension 3.

II.26. Trouver la plus grande valeur propre par une méthode itérative

Source: `valeur-propre-iterative.tex`.

Version imprimable: `valeur-propre-iterative.pdf`

Angle pédagogique : *Maths assistées par ordinateur. Algèbre linéaire*

Objectifs et commentaires. *Les objectifs sont multiples : voir les valeurs propres sous un autre jour ; expérimenter et conjecturer ; trouver les bonnes hypothèses pour que la convergence aie lieu (à ce sujet, il est très étonnant de voir que des étudiants ayant fait le calcul qui prouve la convergence, ont d'immenses difficultés à trouver les conditions de validités de ce calcul, même quand, au fond, il s'agit juste de ne pas diviser par* 0*.)*

Améliorations possibles : géométriquement, ce qui se passe est très clair : par exemple si la plus grande valeur propre est de module supérieur à 1, quand on itère un vecteur par la matrice, sa norme augmente, mais sa direction se raproche du sous-espace propre correspondant à la plus grande valeur propre. Comment pourrait-on faire visualiser ce système dynamique sous-jacent ?

On pourrait ne donner la deuxième partie (démonstration) qu'après que les étudiants aient abordé la première (pour éviter de vendre la mèche...)

Un des inconvénients de l'exercice est que les étudiants, avant la toute fin du DEUG, n'ont jamais manipulé la norme, et ne connaissent donc pas ses propriétés.

On rappelle que si v est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note $\| v \|$ le nombre $\sqrt{|v[1]|^2 + |v[2]|^2}$ (norme euclidienne, en Maple : norm). Cette norme vérifie l'inégalité triangulaire et $\| \lambda v \| = |\lambda| \, \| v \|$.

Phase expérimentale : choisir une matrice A, 2×2 à coefficients réels, au hasard, par exemple l'une des matrices suivantes :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vérifier (avec Maple) que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner des valeurs numériques approchées de ses valeurs propres (si elle n'est pas diagonalisable, changer de matrice !).

Choisir un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ au hasard. Calculer les premières valeurs des vecteurs $Av, \cdots, A^n v, \cdots$. Donner une conjecture sur la limite du rapport de $\| A^{n+1} v \|$ et $\| A^n v \|$, quand $n \to +\infty$.

Répéter l'expérience avec plusieurs matrices.

Démonstration. On veut prouver le résultat suivant : Soit A une matrice 2×2, diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et on note λ la valeur propre de plus grande valeur absolue. Montrer que si v est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, vérifiant une certaine condition (*à trouver !*), le quotient $\| A^{n+1} v \| / \| A^n v \|$ tend vers $|\lambda|$ quand $n \to +\infty$.

a. On pourra commencer par écrire la preuve pour une matrice diagonale.

b. Prouver ensuite le résultat dans le cas général d'une matrice 2×2 diagonalisable non diagonale.

c. Plus difficile : énoncer et prouver le résultat pour une matrice de taille quelconque.

Facultatif. Quand on manipule des matrices de très grande taille, le calcul du polynôme caractéristique est très long (le calcul d'un déterminant d'une matrice $p \times p$ demande plus de $p!$ "opérations élémentaires" (addition ou multiplication de 2 réels). Calculer le nombre d'opérations élémentaires pour calculer $\| A^{n+1}v \| / \| A^n v \|$ pour une matrice A de taille $p \times p$. Commenter ?

II.27. Une courbe fractale : le Flocon de Neige de Von Koch

Sources et figures: `flocon-de-neige/`.

Version imprimable: `flocon-de-neige.pdf`

Angle pédagogique : *Visualisation. Séries*

Objectifs et commentaires. *Visualiser géométriquement des séries (ici, la surface du flocon est la somme des surfaces d'une infinité de petits triangles). Voir un contexte où une série apparait naturellement. Faire preuve d'une certaine autonomie.*

Remarque : cet exercice a été donné sous cette forme à un examen du module "Culture Mathématique", en fin de première année de DEUG MIAS (donc avant l'étude des séries) ; les étudiants travaillaient en groupe de 4.

On considère la suite des polygônes obtenus de la manière suivante :

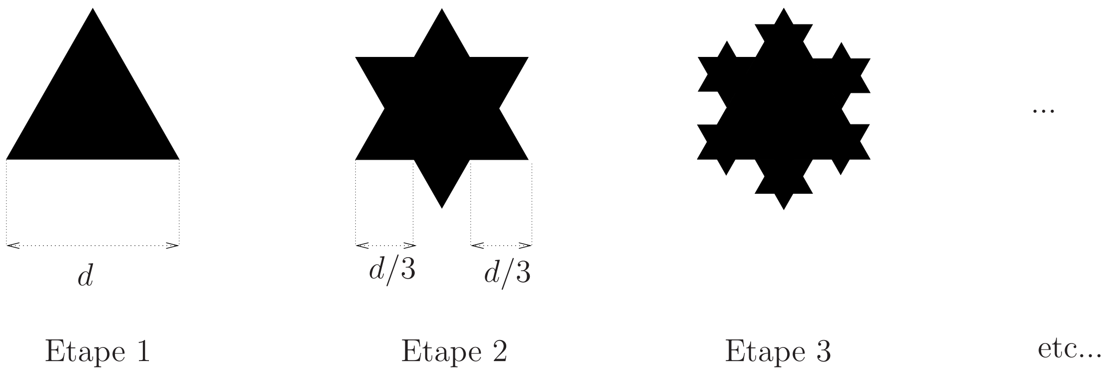


Fig. 18:

Le premier triangle est équilatéral[53], et on passe d'une étape à la suivante en ajoutant des petits triangles équilatéraux comme indiqué sur la figure.

Calculer le nombre de côtés du polygône à l'étape n (pour tout entier $n \geq 1$), son périmètre, et sa surface, en expliquant les formules obtenues.

Trouver la limite de ces trois quantités quand n tend vers $+\infty$.

(Qu'en pensez-vous ?...)

II.28. Une fonction continue mais dérivable nulle part

Sources et figures: `applications-continues-non-derivables/`.

Version imprimable: `applications-continues-non-derivables.pdf`

Angle pédagogique : *Découverte. Séries*

[53]Rappel : ça veut dire que ses trois côtés ont la même longueur...

Objectifs et commentaires. *Réfléchir sur les notions de continuité et de dérivabilité, et sur leur interprétation géométrique ; construire une nouvelle fonction à l'aide d'une série de fonctions, visualiser cette série, étudier ses propriétés.*

L'exercice est long, mais on peut n'en faire que la partie II (construction de la fonction de Weierstrass et preuve de la continuité, sans preuve de la non-dérivabilité). Par contre, il me semble que pour faire la partie III, il vaut mieux avoir fait les rappels de dérivabilité de la partie I.

Montrer que la fonction de Weierstrass n'est pas dérivable est assez difficile, et nécessite des estimées précises. Après avoir présenté cette fonction, on en donne ici une variante, en remplaçant le sinus par une fonction affine par morceaux. La preuve de la non-dérivabilité de cette nouvelle fonction repose alors sur des considérations plus géométriques : la remarque clé est qu'on a choisi la série pour que les pentes de la somme partielle S_n (qui est affine par morceaux) sont minorées, en valeurs absolues, par un nombre C_n qui tend vers l'infini (propriété P1 ci-dessous). D'autre part, la fonction limite F coïncide avec S_n sur tous les multiples de $1/n$. Ceci permet d'encadrer tout nombre x par deux nombres y_n et y'_n en lesquels F et S_n coïncident, de manière à ce que quand n tend vers $+\infty$, ces points tendent vers x. D'après ce qui précède, la pente entre y_n et y'_n doit tendre vers $+\infty$, ce qui permet de conclure avec un petit argument sur les pentes des droites (voir I.1.d).

La figure 19[54] *montre l'allure de quelques sommes partielles de la fonction F (partie III).*

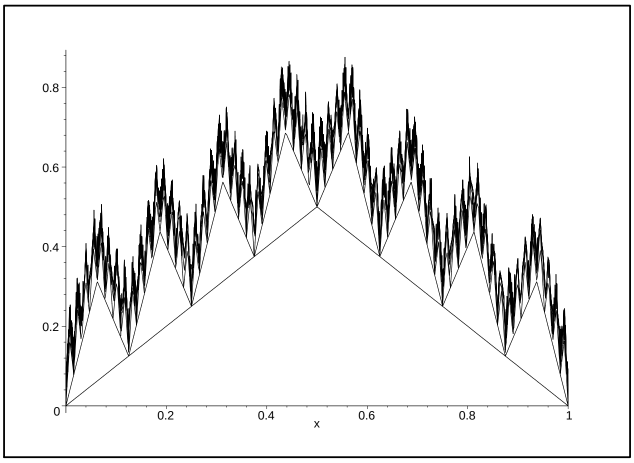


Fig. 19: La fonction F.

Le but de cet exercice est de construire une fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeur dans $\mathbb{R}$, qui est continue, mais qui n'est dérivable en aucun point de l'intervalle.

[54] À ne montrer aux étudiants qu'après la question 1.

I. Rappels préliminaires

Question 1. Pentes des droites

a. Sur la route, avant une pente importante, on trouve un panneau indiquant la valeur de la pente (par exemple :10%). Que signifie ce nombre ?

b. Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction dont le graphe est une droite du plan $\mathbb{R}^2$; le nombre a s'appelle le *coefficient directeur* (ou pente) de la droite. Soient x_1 et x_2 deux réels, et M_1 et M_2 les deux points du graphe correspondant. Le *taux d'accroissement* entre x_1 et x_2 est le rapport entre la distance verticale et la distance horizontale de M_1 à M_2. Donner la formule du taux d'accroissement. Quel est le lien avec la pente de la droite ? Quel est le lien avec l'angle entre la droite et la direction horizontale ?

c. Estimer graphiquement les pentes des droites de la figure 20. Que se passe-t-il quand on fait varier la pente entre $-\infty$ et $+\infty$?

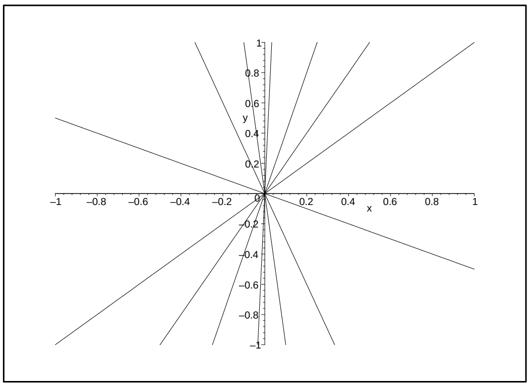


FIG. 20: Pentes des droites

d. Une propriété des pentes des droites Soient M_1, M_2, M_3 trois points du plan d'abscisses respectives $x_1 < x_2 < x_3$. Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 les droites passant respectivement par les points M_2 et M_3, M_1 et M_2, et M_1 et M_2. Expliquer par un dessin (ou deux !) pourquoi *la pente de Δ_2 est toujours plus petite que l'une des deux autres pentes (en valeurs absolues).*

Question 2. Dérivée d'une fonction

a. Estimer graphiquement la dérivée de la fonction de la figure 21 en quelques points. Dessiner l'allure de la fonction dérivée.

b. Donner la définition géométrique (intuitive) de la continuité, puis celle de la dérivabilité.

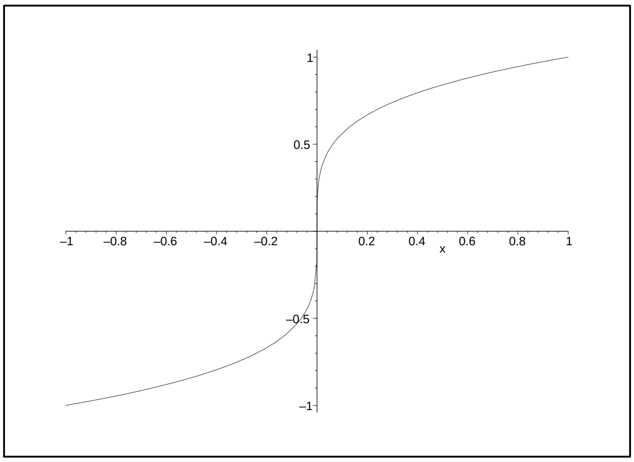


Fig. 21: Estimation graphique de la dérivée

c. Donner les définitions formelles.

d. Dessiner l'allure du graphe d'une fonction non continue en 0 ; d'une fonction continue non dérivable en 0.

e. La fonction de la figure 21 est-elle dérivable en 0 ?

On utilisera par la suite le lemme suivant (qui est une conséquence immédiate de la définition de la dérivabilité) :

Lemme 1 *Si une fonction f est dérivable en un point x_0, et si $(y_n)_{n\geq 0}$ est une suite tendant vers x_0, alors la suite des taux d'accroissements*

$$\frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0}$$

tend vers le nombre réel $f'(x_0)$.

II. La fonction de Weierstrass

La première fonction continue partout mais dérivable nulle part a été construite par Weierstrass (mathématicien allemand, 1815-1897). Cette fonction a aidé à clarifier les notions de continuité et de dérivabilité, et a obligé les mathématiciens a en donner des définitions précises : auparavant, ceux-ci se contentaient des "définitions" intuitives, et pensaient qu'une fonction continue était toujours dérivable sauf éventuellement en quelques points : la construction de Weierstrass est venue contredire cette idée intuitive.

Idée de la construction

L'idée de Weierstrass est de partir d'une fonction f_0 qui est parfaitement dérivable, puisqu'il s'agit de la fonction sinus (figure 22). Puis on perturbe cette première fonction en lui ajoutant une autre sinusoïde, de période 5 fois plus petite, et d'amplitude 2 fois moins grande ; cette deuxième fonction, notée f_1, est représentée sur la figure 23, à gauche. Quand on ajoute f_1 à f_0, on obtient une courbe qui zig-zague autour du graphe de f_0 (voir le dessin de droite ; en effet, f_1 est alternativement positive et négative ; quand f_1 est positive, le graphe de $f_0 + f_1$ est situé au-dessus de celui de f_0, et il est situé au-dessous lorsque f_1 est négative ; quand f_1 s'annule, les deux graphes se rencontrent).

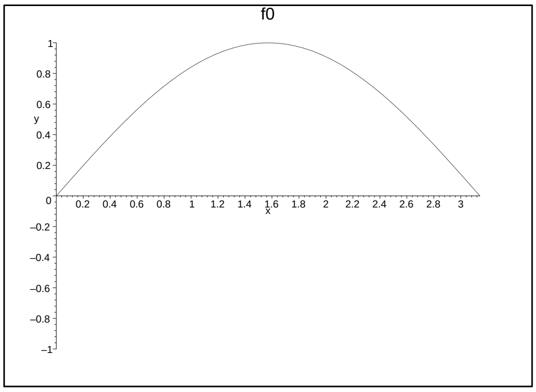


FIG. 22: Idée de la construction de la fonction de Weierstrass (1)

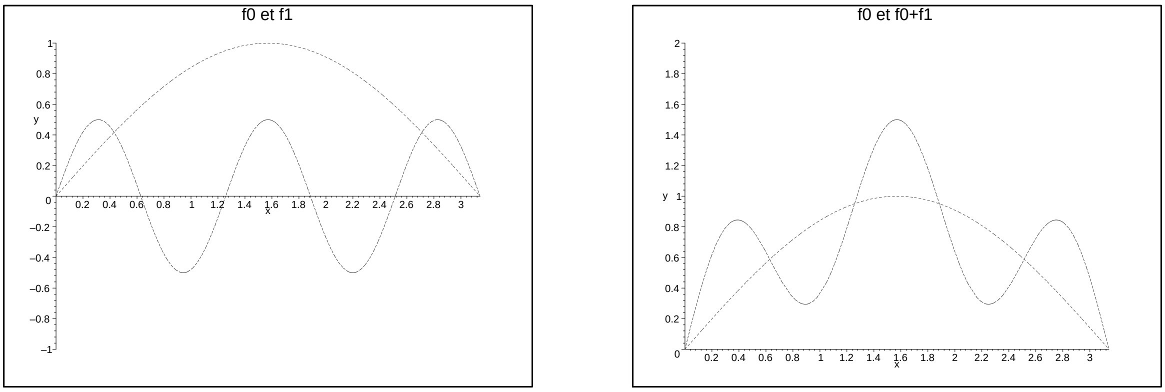


FIG. 23: Idée de la construction de la fonction de Weierstrass (2)

Et on recommence : on prend la fonction f_2 qui est une sinusoïde de période 5 fois plus petite et d'amplitude 2 fois moins grande que f_1, et on l'ajoute encore à la fonction $f_0 + f_1$ (voir la figure 24). On recommence le processus à l'infini (figure 25).

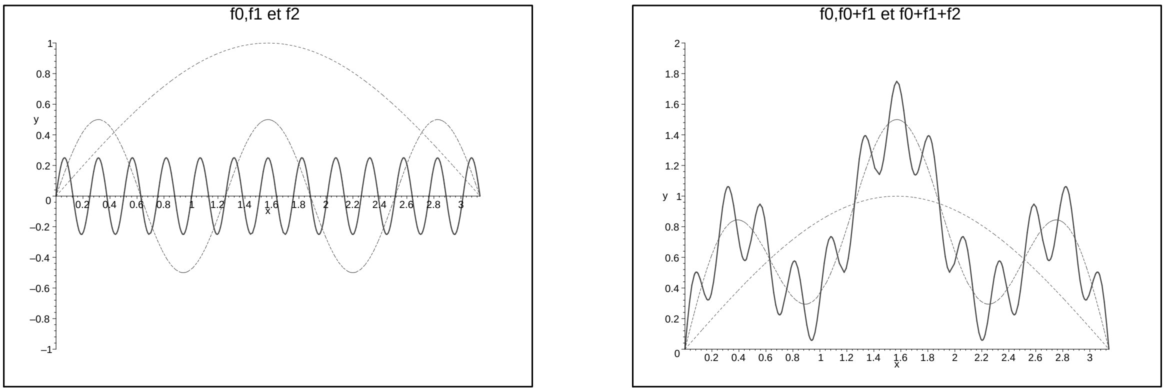


FIG. 24: Idée de la construction de la fonction de Weierstrass (3)

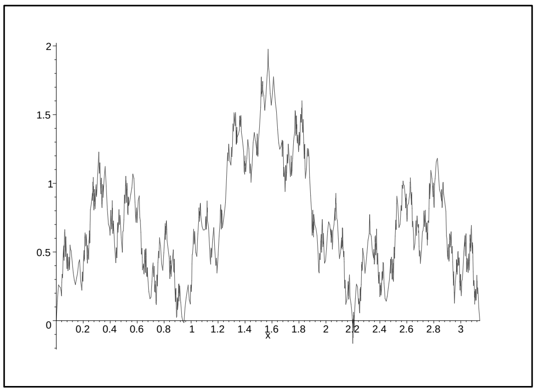


FIG. 25: Idée de la construction de la fonction de Weierstrass (∞)

Question 1. Définition formelle

Définir précisément f_0, f_1, f_2, $\ldots$, et F, la fonction limite.

Question 2. Continuité

Montrer que F est continue.

Question 3. Dérivabilité

Quelle serait la procédure standard pour montrer que F est dérivable ? Essayez ! Qu'est-ce qui ne marche pas ? Pourquoi ne peut-on pas en conclure que F n'est pas dérivable ?

En fait, la fonction F n'est pas dérivable, mais c'est assez difficile à montrer[55]*. On va plutôt examiner une variante de cette première construction, pour laquelle la preuve sera plus facile.*

III. Une version géométrique de la fonction de Weierstrass

Idée de la construction

Cette fois-ci, on part de la fonction f_0 représentée à la figure 26, dont le graphe a la forme d'une dent de hauteur 1/2 et qui est périodique de période 1. La fonction f_1 est alors similaire à f_0, avec huit fois plus de "dents", chaque dent étant deux fois moins élevée que la dent de f_0. Et on recommence : la fonction f_2 a huit fois plus de dents que f_1, de hauteur encore deux fois moins grande ; *etc.*.

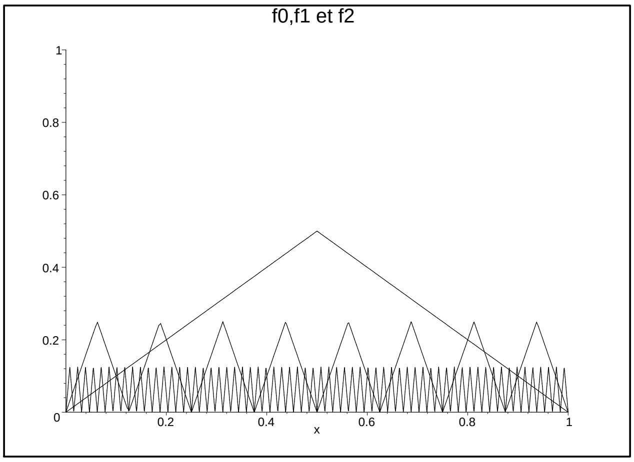


FIG. 26: Les nouvelles fonctions f_0, f_1 et f_2.

Question 1. Dessin et définition formelle

Dessiner (le plus précisément possible) $f_0 + f_1$, et (vaguement) $f_0 + f_1 + f_2$. Définir précisément f_1, f_2, ..., et F, la fonction limite, **en fonction de** f_0.

Question 2. Continuité

Montrer que F est continue.

[55]L'idée est que les graphes des fonctions successives f_0, $f_0 + f_1$, $f_0 + f_1 + f_2$, *etc.*, présentent de plus en plus d'oscillations : quand on promène une tangente le long du graphe de $f_0 + f_1 + f_2$, par exemple, la pente oscille énormément. À la limite, il n'y a plus de tangentes au graphes. Pour transformer cette idée en une preuve rigoureuse, il faut faire des estimations précises des pentes des fonctions successives. Notamment, le nombre "5"qui apparait dans la construction n'est pas choisi au hasard, un nombre plus petit peut produire une fonction parfaitement dérivable...

Question 3. Dérivabilité

On veut montrer que F n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Soient $S_0 = f_0$, $S_1 = f_0 + f_1$, $S_2 = f_0 + f_1 + f_2$, $\ldots$ les sommes partielles de la fonction F. *L'idée de la preuve est d'étudier les pentes des fonctions S_n, et leur lien avec les taux d'accroissements de la fonction limite F.*

a. Pentes de S_n

DÉFINITION On dit qu'une fonction est *affine par morceaux* sur l'intervalle $[0,1]$ si cet intervalle est découpé en sous-intervalles, sur chacun desquels la fonction est affine (c'est-à-dire que son graphe est un segment).

Dans ce cas, la dérivée est bien sûr constante sur chaque morceau, et est égale à la pente du segment (voir la section I.1.b).

Soit $n > 0$. La fonction S_n est affine par morceaux. Donner les valeurs de la plus grande pente et de la plus petite pente (en valeur absolue). Montrer la propriété **P1** (voir aussi l'aide ci-dessous) :

PROPRIÉTÉ P1 *Il existe une suite $(C_n)_{n>0}$, tendant vers $+\infty$, telle que (pour tout $n > 0$), les valeurs absolues des pentes de tous les morceaux de la fonction S_n sont supérieures ou égales à C_n.* [56]

• Aides pour la preuve de P1

- Soit f une fonction, et g la fonction définie par $g(x) = f(8x)/2$. Quel lien y a-t-il entre la dérivée de g et celle de f ?
- Déterminer les pentes des fonctions f_0, f_1, f_2, *etc.*.
- Donner la valeur de la pente sur chacun des morceaux de S_1. Quel est (en valeur absolue) la plus grande pente, la plus petite ?
- Déterminer de même la plus petite pente de la fonction S_n.

b. Lien entre F et S_n Soit n un entier. Trouver tous les endroits où les fonctions F et S_n sont égales ; autrement dit, montrer la propriété **P2** (en complétant les pointillés, voir l'aide ci-dessous) :

PROPRIÉTÉ P2 *Soit $x \in [0,1]$; alors*

$$F(x) = S_n(x) \Leftrightarrow x \in \{\ldots\}.$$

• Aides pour la preuve de P2 Quels sont les points de l'intervalle $[0,1]$ où F s'annule ? Trouver les points x où $F(x) = f_0(x)$; puis, pour chaque entier $n \geq 1$, ceux où $F(x) = S_n(x)$.

c. Dérivabilité en 0 [57] *On peut maintenant montrer que F n'est pas dérivable en* 0. Aides : utiliser le lemme 1 et les propriétés **P1** et **P2**.

[56] C'est pour obtenir cette propriété qu'on a choisit "huit fois plus de pics" quand on passe de f_n à f_{n+1}.

[57] Cette question n'est pas indispensable, mais elle aide à comprendre la fin de la preuve.

d. Lien entre les taux d'accroissement de F et des pentes de S_n À partir de maintenant, on se donne un nombre $x_0 \in]0,1[$. Montrer la propriété **P3** :

Propriété P3 *Pour tout entier $n > 0$, il existe deux réels y_n et y'_n tels que :*

1. *y_n et y'_n sont de part et d'autre de x_0 (c'est-à-dire que $x_0 \in [y_n, y'_n]$) ;*
2. *la longueur de l'intervalle $[y_n, y'_n]$ est inférieure à $1/8^n$;*
3. *le taux d'accroissement de F entre y_n et y'_n est supérieur (en valeur absolue) à C_n (où (C_n) est la suite définie dans la propriété **P1**).*

• **Aides pour la preuve de P3** Que peut-on dire du taux d'accroissement de F entre deux points successifs où $F = S_n$?

e. On reprend les notations de la question précédente. Soit, pour chaque entier $n > 0$, t_n le taux d'accroissement, pour F, entre x_0 et y_n et t'_n celui entre x_0 et y'_n. Montrer que l'un des deux taux d'accroissement t_n et t'_n est supérieur (en valeur absolue) à C_n (aide : utiliser la question I.1.d).

f. Montrer enfin que F n'est pas dérivable en x_0 (utiliser le lemme 1, partie I).

g. Conclure.

Niveau III : Licence

III.1. Eclipses

Source: `eclipses.tex`.

Version imprimable: `eclipses.pdf`

Angle pédagogique : *Visualisation. Géométrie euclidienne*

Objectifs et commentaires. *Cet exercice fait appel aux qualités de visualisation géométrique, ainsi qu'à la culture mathématique de l'étudiant. Indications : il faut modéliser le plan (orienté) de l'orbite par sa normale, considérer la Terre fixe, le cylindre tronqué tangent à l'étoile et pointant vers la Terre (ou bien un cône tronqué issu de la Terre et tangent à l'étoile dans la question 3) ; le lieu sur la sphère des centres de la planète tels qu'elle intersecte le cylindre/cône est un disque sphérique (calotte) ; son orthogonal est une bande délimitée par deux cercles parallèles de même rayon.*

Une des méthode de chasse des exoplanètes consiste à mesurer la luminosité d'une étoile. Si celle-ci diminue soudainement (mais néanmoins légèrement) pendant quelques heures ou quelques jours, et ce périodiquement, il y a des chances pour qu'une planète soit en orbite autour de l'astre. Pour cela, il faut que l'orbite de la planète la fasse passer devant l'astre. On dira que la planète est “à éclipses”.

Question 1.

Nous considérons une planète possédant une orbite circulaire de rayon R centrée sur son étoile, dont nous connaissons pas l'orientation dans l'espace. L'étoile est assimilée à une sphère de un rayon r. En négligeant la taille de la planète devant celle de l'astre, la taille de l'astre devant la taille de l'orbite, et enfin la taille de l'orbite devant la distance à la Terre, (c'est raisonnable si on cherche une configuration analogue à celle de la Terre et du Soleil), calculer (a) la probabilité pour que la planète soit à éclipses, (b) la probabilité pour que la planète éclipse en ce moment même son étoile.

Du mal ? Voici une indication : une orientation aléatoire de l'orbite se modélise par la sphère muni de la mesure de probabilité uniforme.

Question 2.

Trouver une astuce quand on ne néglige plus la taille de la planète devant celle de l'astre.

Question 3.

Expliquer la démarche de calcul quand on néglige plus rien, sans expliciter la formule.

Note : L'hypothèse que l'orbite est circulaire est restrictive : de nombreuses planètes extrasolaires ont une orbite elliptique.

III.2. Retourner une droite.

Sources et figures: `retourner-une-droite/`.

Version imprimable: `retourner-une-droite.pdf`

Angle pédagogique : *À quoi ça sert. Topologie*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Cet exercice est extrait du fascicule* Géométrie dans les espaces de paramètres, une méthode de géométrisation, par Adrien Douady (Cahier de didirem, publication de l'IREM Paris 7, novembre 1997). *A. Douady précise que le problème lui a été suggéré par David Epstein.*

En plus de l'exercice ci-dessous, l'ouvrage cité contient deux autres problèmes. Le but avoué est de faire comprendre l'intéret des espaces de paramètres. Citons l'introduction :

"Depuis le commencement du XXème siècle - on peut dire à la suite de Hilbert - la géométrie s'est avérée être un moyen extrèmement efficace d'appréhender de nombreux problèmes en mathématiques et en diverses sciences. Souvent, ce n'est pas sur de la géométrie euclidienne en dimension 2 ou 3 que l'on tombe, mais sur de la géométrie dans un espace adapté au problème, en général un ***espace de paramètres*** *construit ad-hoc.(...)"*

Ici, l'espace des paramètres sera de dimension 2, mais "il est aisé de concevoir qu'il n'en est pas toujours ainsi. Par exemple, l'ensemble des orbites possibles d'une planète est de dimension 5. En robotique, on est amené à considérer l'ensemble de toutes les positions possibles d'un solide ; c'est une variété de dimension 6, plongeable dans $\mathbb{R}^9$."

Nous présentons ce problème sous trois versions.

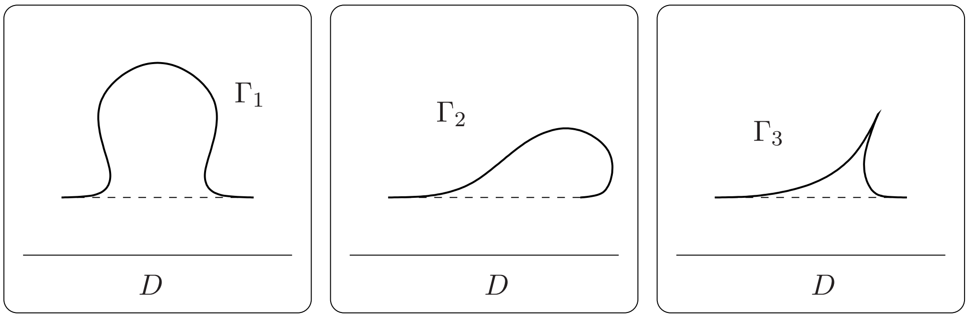


FIG. 27:

Considérons dans le plan un arc de courbe Γ qui soit l'un des arcs Γ_1, Γ_2 Γ_3 dessinés figure 27, et D une droite ne rencontrant pas Γ. Est-il possible de déplacer D de façon continue et de la ramener à sa place avec l'orientation opposée, sans que jamais au cours du mouvement elle ne soit tangente à Γ ?

Indication la réponse n'est pas la même dans les trois cas : il y a deux OUI et un NON, ou le contraire. Les paris sont ouverts.

Niveau IV : Autres

IV.1. Quadrature

©2001 Arnaud CHÉRITAT (copyleft LDL : Licence pour Documents Libres).

Source: `planetes.tex`.

Version imprimable: `planetes.pdf`

Angle pédagogique : *Ludique. Géométrie euclidienne*

OBJECTIFS ET COMMENTAIRES. *Appliquer la géométrie euclidienne à un problème d'astronomie. La réponse attendue à la question 1 est "l'angle $\widehat{TMS}$". Pour la question 5, l'écart va jusqu'à π, et la quadrature correspond au plus grand éloignement apparent de Vénus au Soleil.*

On idéalise la trajectoire des planètes autour du Soleil comme des cercles situés dans le même plan et de centre le Soleil. Rappelons que chaque planète parcourt son orbite avec une période différente. L'orbite de Mars est plus grande que celle de la Terre. Donc, vue de la Terre, Mars est toujours éclairée. Mais pas toujours de face : le Soleil, la Terre et Mars n'étant pas toujours sur une même ligne droite, il arrive que l'on voie Mars éclairée de biais.

Question 1.

Formaliser l'écart par rapport à un éclairement de face, en l'identifiant à un angle géométrique ($\in [0, \pi]$) du problème.

Question 2.

Pouvez-vous donner un critère géométrique simple précisant dans quelles conditions cet écart est maximal ?

Question 3.

Pouvez-vous en donner une preuve géométrique ?

Question 4.

Calculer l'écart maximal, sachant que le rayon de l'orbite de la Terre est de 1ua (unité astronomique), et que ce rayon est approximativement de $1,52$ua pour Mars ?

Question 5.

Pour Vénus, dont l'orbite a un rayon de $0,72$ua, au lieu de Mars, que se passe-t-il ?

Liste des exercices triés par niveau.

I. Niveau DEUG première année

* Nouvel exercice.

II. Niveau DEUG deuxième année

III. Niveau DEUG biologie

IV. Niveau DEUG sciences physiques

V. Niveau Licence

VI. Niveau Autres

Liste des exercices triés par angle pédagogique.

Angle pédagogique 1: À quoi ça sert

Angle pédagogique 2: Découverte

Angle pédagogique 3: Difficultés oubliées

Angle pédagogique 4: Expérimental

Angle pédagogique 5: Historique

Angle pédagogique 6: Langage

Angle pédagogique 7: Ludique

Angle pédagogique 8: Maths assistées par ordinateur

Angle pédagogique 9: Méta-mathématiques

Angle pédagogique 10: Quizz

Angle pédagogique 11: Technique

Angle pédagogique 12: Visualisation

Angle pédagogique 13: Autres

Liste des exercices triés par thème.

I. Algèbre linéaire

II. Écriture décimale

III. Équations différentielles

IV. Équivalents

V. Fonctions d'une variable réelle

VI. Fonctions de plusieurs variables réelles

XVI. Technique

XVII. Théorie des ensembles, et structures de base

XVIII. Topologie

XIX. Autres thèmes

Liste des exercices triés par auteur.

I. Exercices proposés par Thierry Barbot

II. Exercices proposés par François Béguin

III. Exercices proposés par Laurent Bessières

IV. Exercices proposés par Arnaud Chéritat

IX. Exercices proposés par Frédéric Le Roux

X. Exercices proposés par Laurent Mazet

XI. Exercices proposés par Panos Papazoglou

XII. Exercices proposés par Frédéric Pham

XIII. Exercices proposés par Matthieu Romagny

XIV. Exercices proposés par Pierrette Santenac