
Fonctionnement

Rappelons notre motivation : vous donner un “coup de pouce” pour le passage (difficile) du DEUG à la Licence, en faisant deux semaines de maths supplémentaires.

Les maths du stage

On a choisi de parler des fractales. Les fractales ne font pas partie des “outils de base” des mathématiciens (comme l’algèbre linéaire, le calcul différentiel, la topologie, *etc.*), on aurait donc pu choisir un autre thème. D’ailleurs, la petite histoire qu’on va vous raconter n’est pas très connue des mathématiciens.

L’avantage du thème des fractales, c’est d’avoir un joli morceau de maths, qu’on peut bien raconter en deux semaines ; mais c’est surtout un prétexte pour réviser, manipuler, un certain nombre de techniques utiles en Licence (notions topologiques, suites, théorie des ensembles, transformations linéaires du plan, théorème du point fixe), en les motivant par une histoire cohérente.

Juste deux semaines de rab ? On aimerait que ce stage soit un peu plus que deux semaines de cours-TD supplémentaires. Vous connaissez les reproches habituels que les profs font aux étudiants : pas assez intéressés, actifs, dynamiques, trop mous, ne travaillent pas, *etc.* Pourquoi est-ce que les étudiants ne sont pas toujours très dynamiques ? Quand on est étudiant, on passe beaucoup de temps à faire des choses “techniques” (on pourrait aussi dire “analytique” ; j’entends par là des activités difficiles mais très répétitives, comme calculer un DL, diagonaliser une matrice, dériver une fonction, calculer la somme d’une série géométrique...). Ces choses sont l’équivalent des gammes des musiciens. Peu de gens ressentent de l’enthousiasme pour ce genre d’activité. Est-ce que je vais vous dire qu’il n’y aura pas d’activité technique au cours du stage ? Non ! Il y en aura (on va même calculer la somme d’une série géométrique...). On ne peut pas vraiment faire des maths sans technique (pas de musique sans gammes). Par contre, *toutes les activités techniques seront motivées*. La somme de la série servira à calculer une surface. Demain, vous allez manipuler des unions et intersections d’ensembles, mais le but sera de traduire mathématiquement un dessin. Pendant les deux semaines du stage, comme je l’ai dit, on va vous raconter une histoire cohérente ; cette histoire est un peu longue, et elle contient des aspects techniques, mais on essaiera toujours que vous ayez présent à l’esprit l’histoire qu’on est en train de raconter. De votre côté, vous devrez essayer de toujours savoir où vous en êtes ; vous avez le droit de dériver une fonction, mais seulement si vous savez pourquoi vous le faites...

Durée

Le stage a lieu du Lundi 13 Septembre au Vendredi 24 Septembre. On travaille de 10h à 12h (ou 12h30) le matin, de 13h30 (ou 14h) à 16h30 l’après-midi.

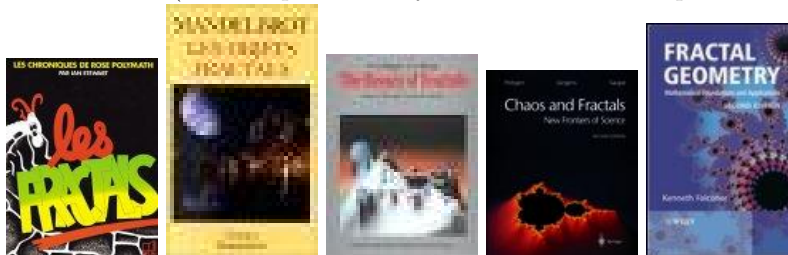
On essaie de raconter une histoire cohérente qui s’étale sur les deux semaines ; du coup, il est difficile de continuer à suivre quand on a raté un chapitre. On impose la règle du jeu suivante : vous pouvez arrêter le stage à tout moment (merci de nous prévenir !), mais vous ne pouvez pas rater une séance et reprendre ensuite (sauf problème particulier).

Quelques livres autour des fractales

Vous pouvez trouver quelques livres à la bibliothèque universitaire, au rayon 514.74 (au premier étage, parmi les livres d'exercices de DEUG).

- *Les Fractals*, bande dessinée de I. Stewart (éditions Belin-Pour La Science). Voici une bande dessinée très agréable à lire, qui introduit le monde des fractals, et notamment la notion de dimension fractale. Il n'y a pas de mathématiques difficiles là-dedans (il faut juste connaître la fonction "log"...). La BU en a plusieurs exemplaires.
- *Les objets fractals*, B. Mandelbrot, Flammarion (3e d.), Paris, 1989. C'est par ce livre que Mandelbrot a attiré l'attention des scientifiques sur l'intérêt de la notion de fractale (c'est aussi dans ce livre qu'il a inventé le mot "fractale"). Qu'est-ce qui relie les cratères de la lune, la côte de la Bretagne, la répartition des galaxies, le flocon de neige de Von Koch, et le mouvement brownien d'un grain de poussière dans un liquide ? C'est leur aspect "fractal" bien sûr ! La BU en a 6 exemplaires.
- Feuilletez *The beauty of fractals*, H.-O. Peitgen, pour la beauté des images obtenues à partir de la dynamique des fonctions holomorphes.
- *Chaos and Fractals : New Frontiers of Science* par H.-O. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe, un gros livre qui contient notamment un chapitre sur les IFS (en anglais, et oui, il faut s'y mettre...).
- *Fractal Geometry* de K. Falconer, expose la théorie mathématique de la dimension fractale, dans toute sa rigueur. Lisez l'introduction, et revenez-y quand vous aurez appris ce qu'est une "mesure" (dans le cours d'intégration de licence).

Enfin, le petit film d'Adrien Douady et François Tisseyre, *La dynamique du lapin*, est disponible en cassette vidéo (un exemplaire au rayon maths et un exemplaire au rayon informatique).



Premiers ensembles fractals : recherche

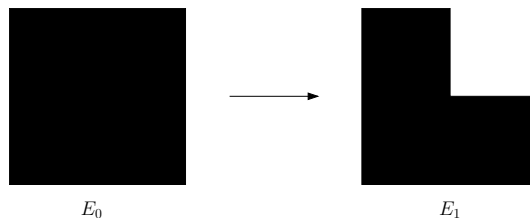
On décrit ci-dessous quatre procédés itératifs de constructions d'ensembles. Pour chacun des procédés décrits, on voudrait définir formellement l'ensemble obtenu "à la limite".

Question 1. Le triangle de Sierpinski (1h30)

Première étape On part d'un grand carré E_0 , on divise ce carré en quatre petits carrés, et on se débarrasse du carré en haut à droite, pour ne conserver que les trois autres petits carrés. On obtient ainsi l'ensemble E_1 (voir figure ci-dessous).

Deuxième étape On applique le même traitement à chacun des trois petits carrés restants dans l'ensemble E_1 . On obtient ainsi l'ensemble E_2 .

Étapes suivantes On obtient l'ensemble E_{n+1} en appliquant le même traitement à chacun des petits carrés de l'ensemble E_n .



a. Les ensembles E_0 et E_1 sont représentés ci-dessus. Dessiner les ensembles correspondant aux étapes suivantes (au moins E_2 et E_3).

b. On suppose que l'ensemble de départ E_0 est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. On voudrait définir formellement l'ensemble E_n obtenu à l'étape n (c'est-à-dire donner une formule explicite définissant E_n). **Aide :**

- ça n'est pas facile!
- Quel carré enlève-t-on pour définir E_1 ?
- Combien de carrés enlève-t-on, à partir de E_1 , pour définir E_2 ? Remarquer qu'on pourrait aussi en enlever 4, pour obtenir un ensemble qui se décrit plus facilement (on peut enlever un carré déjà enlevé!). Décrire ces quatre carrés par une formule.
- Mêmes questions pour l'étape suivante (définition de E_3). Décrire les seize carrés qu'on enlève, en utilisant des indices pour obtenir une écriture courte (il va falloir généraliser aux étapes suivantes...).
- Généraliser aux étapes suivantes.
- En déduire une formule définissant E_{n+1} en fonction de E_n .
- (optionnel) En déduire une formule définissant directement E_n sans référence à E_{n-1} .

- c. Définir formellement l'ensemble qu'on obtient "à la limite".

Question 2. L'antenne de télé

Première étape On part d'une croix E_0 à quatre branches de même longueur. Aux deux-tiers de chacune des branches (en partant du centre de la croix), on rajoute deux branches trois fois plus petites. On obtient ainsi l'ensemble E_1 , qui est constitué de 5 petites croix, chacune trois fois plus petite que la croix E_0 (il y a une petite croix au centre et quatre petite croix "satellites").

Deuxième étape On applique le même traitement à chacune des 5 petites croix de l'ensemble E_1 . On obtient ainsi l'ensemble E_2 .

- a. Dessiner rapidement les ensembles correspondant aux premières étapes.

Comme pour le triangle de Sierpinski, on pourrait définir mathématiquement les ensembles E_n , mais c'est fastidieux. N'hésitez pas à le faire si vous avez une ou deux heures à perdre...

- b. À partir des ensembles E_n , définir l'ensemble qu'on obtient "à la limite".

Question 3. Le flocon de neige de von Koch

Première étape On part d'un triangle équilatéral rempli E_0 de côté 1. Au milieu de chacun des trois côtés de ce triangle, on colle un triangle équilatéral rempli de côté $1/3$. On obtient ainsi l'ensemble E_1 , qui est un polygone rempli.

Deuxième étape Au milieu de chacun des côtés du polygone E_1 , on colle un triangle équilatéral rempli de côté $1/9$. On obtient ainsi l'ensemble E_2 .

- a. Dessiner rapidement les ensembles correspondant aux premières étapes.

- b. À partir des ensembles E_n , définir l'ensemble qu'on obtient "à la limite".

Question 4. La courbe de von Koch

Première étape On part d'un segment horizontal E_0 de longueur 1. On le divise en trois segments de longueur $1/3$, on enlève celui du milieu, et on le remplace par deux segments de longueur $1/3$ (formant une pointe vers le haut). On obtient ainsi l'ensemble E_1 , qui est constitué de 4 petits segments.

Deuxième étape On applique le même traitement à chacun des 4 segments de E_1 .

- a. Dessiner rapidement les ensembles correspondant aux premières étapes.

- b.** Comment définir l'ensemble qu'on obtient "à la limite" ?
-

Premiers ensembles fractals : bilan

Corrigé rapide

Le tapis de Sierpinski Les carrés qu'on enlève pour passer de E_n à E_{n+1} sont les carrés du type

$$\left[\frac{2p-1}{2^{n+1}}, \frac{2p}{2^{n+1}} \right] \times \left[\frac{2q-1}{2^{n+1}}, \frac{2q}{2^{n+1}} \right]$$

où p et q sont variés entre 1 et 2^n . Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$E_{n+1} = E_n \setminus \left(\bigcup_{p=1}^{2^n} \bigcup_{q=1}^{2^n} \left[\frac{2p-1}{2^{n+1}}, \frac{2p}{2^{n+1}} \right] \times \left[\frac{2q-1}{2^{n+1}}, \frac{2q}{2^{n+1}} \right] \right)$$

et donc

$$E_n = [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_{p=1}^{2^k} \bigcup_{q=1}^{2^k} \left[\frac{2p-1}{2^{k+1}}, \frac{2p}{2^{k+1}} \right] \times \left[\frac{2q-1}{2^{k+1}}, \frac{2q}{2^{k+1}} \right] \right)$$

Par construction la suite des ensembles E_n est décroissante, c'est-à-dire que, pour tout n , l'ensemble E_{n+1} est inclus dans E_n . L'ensemble E_∞ qu'on obtient "à la limite" peut donc s'écrire comme l'intersection de tous les ensembles E_n , c'est-à-dire

$$E_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left([0, 1] \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_{p=1}^{2^k} \bigcup_{q=1}^{2^k} \left[\frac{2p-1}{2^{k+1}}, \frac{2p}{2^{k+1}} \right] \times \left[\frac{2q-1}{2^{k+1}}, \frac{2q}{2^{k+1}} \right] \right) \right)$$

En fait, on verra dans la suite que ces définitions posent un petit problème : l'ensemble E_∞ comme défini ci-dessus n'est pas fermé, alors qu'il est utile de ne considérer que des suites décidées que la limite d'une suite d'ensemble est toujours fermée. Voici comment résoudre ce problème. On définit la frontière d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ comme l'ensemble des points x telle que tout disque centré en x rencontre à la fois E et son complémentaire. Puis, on définit l'adhérence d'un sous-ensemble E comme l'union de E et de sa frontière. Par exemple, l'adhérence d'un disque ouvert est le disque fermé correspondant. L'adhérence d'un ensemble E est toujours un ensemble fermé (c'est même le plus petit ensemble fermé contenant E). Et sur un dessin, on ne voit souvent pas la différence entre un ensemble et son adhérence (on ne voit guère la différence entre un disque ouvert et le disque fermé correspondant). Pour en revenir à l'exemple de l'antenne de télé, il vaut donc mieux considérer que l'ensemble E_∞ qu'on obtient "à la limite" est l'adhérence de l'union de tous les E_n , c'est-à-dire

$$E_\infty = \text{adh} \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n \right)$$

Vous comprendrez plus tard pourquoi il vaut mieux considérer que E_∞ est toujours fermé...

L'antenne de télé Ici, la suite des ensembles E_n est croissante, c'est-à-dire que, pour tout n , l'ensemble E_{n+1} contient E_n . On peut alors considérer que l'ensemble E_∞ qu'on obtient "à la limite" est l'union de tous les ensembles E_n , c'est-à-dire

$$E_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$$

En fait, comme expliquer pour le triangle de Sierpinski, il vaut mieux poser

$$E_\infty = \text{adh} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \right)$$

Le flocon de von Koch Comme pour l’antenne de télé, la suite des ensembles E_n est croissante. Donc l’ensemble E_∞ se définit de la même façon que pour l’antenne de télé.

La courbe de von Koch Ici la suite des ensembles E_n n’est ni croissante, ni décroissante. La définition de l’ensemble E_∞ obtenu “à la limite” va donc être plus délicate... Voici une solution possible. Supposons que E_0 soit le segment d’extrémités les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(0, 1)$. Il est alors facile de voir que, pour tout n , la courbe E_n divise le carré $[0, 1] \times [-1, 1]$ en deux morceaux ; notons F_n le morceau située au-dessous de la courbe E_n (on peut définir F_n plus formellement : par exemple, F_n est l’ensemble des points du carré $[0, 1] \times [-1, 1]$ qui peuvent être joint depuis le point $(-1, 0)$ par une courbe continue contenue dans le carré $[0, 1] \times [-1, 1]$, et qui ne coupe pas la courbe E_n). On remarque alors que la suite des ensembles F_n est croissante : pour tout n , l’ensemble F_{n+1} contient F_n . Par ailleurs, pour tout n , la courbe E_n est la *frontière* de F_n dans le carré $[0, 1] \times [-1, 1]$. L’ensemble E_∞ qu’on obtient à la limite des E_n peut alors se définir comme la *frontière* de l’union de tous les F_n dans le carré $[0, 1] \times [-1, 1]$. Ça n’est guère simple...

I Où en est-on ?

Dans cette première journée, nous nous sommes intéressés à quelques constructions de sous-ensembles du plan : le triangle de Sierpinski, l’“antenne de télé”, le flocon de von Koch, la courbe de von Koch. Tous ces ensembles sont dits *fractals*. Que signifie cet adjectif ? En fait, il n’est guère possible de donner une définition mathématique à la fois suffisamment précise et suffisamment générale. Néanmoins, de façon informelle, on peut dire qu’un ensemble est *fractal* si chaque petite partie de cet ensemble ressemble à une copie réduite de l’ensemble tout entier (on parle d’*auto-similarité*). Cette propriété d’auto-similarité ne semble *a priori* pas très naturelle¹ ; pourtant, il s’avère que des ensembles fractals apparaissent naturellement dans des situations très diverses, et jouent un rôle important dans la modélisation de nombreux phénomènes (en physique, en synthèse d’images, en finances, *etc.*)².

Au cours de ces deux semaines nous allons décrire un procédé très général de construction de sous-ensembles fractals du plan, et surtout vous faire démontrer un théorème qui affirme que ce procédé fonctionne effectivement. Cette démonstration sera l’occasion de réviser ou d’introduire un certain nombre de notions bien utiles en licence, et puis aussi de vous “déroutiller les neurones” après ces vacances.

Afin d’être un peu plus précis, revenons sur les constructions d’ensembles fractals entrevues aujourd’hui (tapis de Sierpinski, antenne de télé, flocon de Von Koch et courbe de Von Koch). Dans chacun des cas, un procédé récursif permet de construire une suite d’ensembles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$: on part d’un ensemble E_0 , on le modifie pour obtenir un ensemble E_1 , le même type d’opération appliqué à E_1 produit un ensemble E_2 , *etc.*. On s’intéresse alors à l’ensemble fractal E_∞ “obtenu à la limite”.

Ces constructions soulèvent deux problèmes :

¹C’est sûrement pour cette raison que l’importance des *objets fractals* n’a été découverte que récemment (à partir du milieu des années 70).

²Nous n’en dirons guère plus sur ce sujet, et, en tout cas, pas pour l’instant. Nous vous invitons néanmoins à parcourir le site sur les fractales de l’Université de Yale (classes.yale.edu/fractals/), en particulier, les liens *2.F.Natural fractals*, *5.E.Diffusion Limited Agregation*, *V.h.Galaxy distribution*, *5.K.Stock Markets Surrogates*. Vous pouvez aussi lire le livre de Mandelbrot *Les objets fractals*.

1. Le premier problème est de définir mathématiquement les ensembles de la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour le triangle de Sierpinski, on a trouvé une formule explicite pour chaque ensemble E_n . On pourrait probablement trouver aussi une formule pour les autres exemples, mais ça n'a pas l'air très simple (essayez, par exemple, pour la courbe de Von Koch, et vous verrez que c'est assez délicat). D'ailleurs, pour le triangle de Sierpinski, on a eu besoin d'un peu d'astuce pour trouver une formule raisonnable (on a remarqué qu'on pouvait "enlever des carrés qui avaient déjà été enlevés aux étapes précédentes"). On aimerait trouver un procédé général, qui marche sans avoir à utiliser des astuces *ad hoc*.
2. Le second problème est de définir mathématiquement l'ensemble E_∞ "obtenu à la limite" à partir de la suite d'ensembles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour le triangle de Sierpinski, on a défini E_∞ comme l'intersection de tous les ensembles E_n . Pour l'antenne de télé et le flocon de neige, E_∞ est l'union de tous les E_n (ou l'adhérence de l'union de tous les E_n , si on veut que E_∞ soit fermé). Pour la courbe de Von Koch, il faut nécessairement utiliser une opération topologique (la notion de frontière) en plus des opérations ensemblistes (union, intersection, complémentaire). Dans d'autres exemples, on ne voit pas bien comment définir l'ensemble "limite". Comment feriez-vous pour la courbe en zig-zag ci-dessous ?

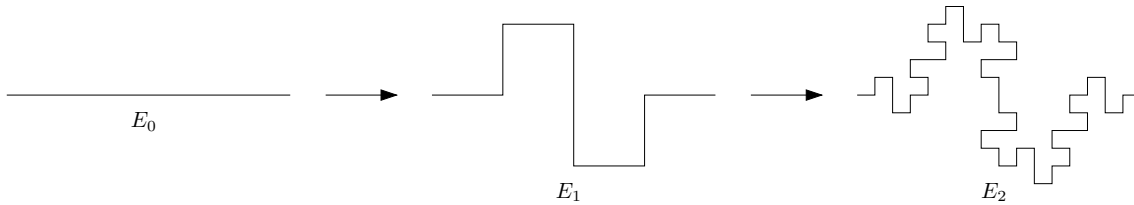


FIG. 1 – Comment définir formellement l'ensemble obtenu "à la limite" de la suite d'ensembles E_n esquissée ci-dessus ?

Grosso modo, nous allons passer les deux semaines qui viennent à tenter de résoudre ces deux problèmes.

Programme des deux semaines

Fin de la feuille I (demain mardi 14/09) : premiers ensembles fractals Dans la seconde partie de la feuille I (mardi 14/09), nous vous proposons de faire deux choses :

- tout d’abord, de voir sur des exemples quelques propriétés assez étranges des ensembles fractals : par exemple, nous verrons que la courbe de Von Koch est une courbe de longueur infinie, bien que le domaine du plan qu’elle encercle soit d’aire finie (ce genre de propriété “bizarre” est caractéristique des ensembles fractals).
- puis, de réviser quelques propriétés liées aux opérations d’union, d’intersection, de passage au complémentaire, qui nous seront utiles dans la suite (et qu’il est nécessaire de bien connaître pour suivre les cours de Calcul Intégral en licence...).

Feuille II (mercredi 15/09 et jeudi 16/09) : IFS Dans cette feuille, nous vous proposerons un procédé général de construction de suites d’ensembles, qui englobe les exemples que nous avons déjà vus, et qui permet de définir formellement et simplement chaque ensemble E_{n+1} à partir de l’ensemble E_n . Vous manipulerez ce procédé sur des exemples afin de vous convaincre qu’il fonctionne, et permet bien d’obtenir de très nombreux ensembles fractals de manière fort simple. Par ailleurs, il se trouve que ce procédé utilise de façon cruciale des transformations du plan obtenues par composition de rotations et d’homothéties. Ce sera l’occasion de faire quelques exercices sur les transformations du plan, les nombres complexes, et l’algèbre linéaire. En particulier, ces exercices seront nécessaires pour comprendre comment les logiciels qui tracent les fractales stockent les transformations du plan utilisées pour leur construction.

Feuille III (vendredi 17/09 le matin, et lundi 20/09) : distance de Hausdorff Dans la feuille II, nous avons décrit un procédé général qui permet de construire des suites d’ensembles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il s’agit maintenant de montrer que ces suites d’ensembles “convergent vers un ensemble limite E_∞ ”. Et bien sûr, la première tâche est de définir proprement ce que cela signifie “converger” pour une suite convergente de sous-ensembles du plan, et ce qu’est la “limite” d’une suite de sous-ensembles du plan. Le plus pratique pour cela est de définir une notion de *distance* entre deux sous-ensembles du plan (on parle de *distance de Hausdorff*). Nous essaierons de vous faire deviner ces définitions à partir d’un certain nombre d’exemples,... puis il faudra les manipuler un peu pour bien les comprendre, et montrer qu’elles vérifient bien toutes les propriétés nécessaires (unicité de la limite, etc.).

Intermède (vendredi 17/09 après-midi) : demi-journée culturelle Il serait dommage de parler de fractales, sans évoquer les très jolis ensembles fractals qui apparaissent dans divers domaines des maths, ou les applications de la théorie des fractales dans d’autres sciences. Nous vous montrerons donc un ou deux films à ce sujet.

Feuille IV (mardi 21/09 et mercredi 22/09) : convergence des IFS Le but de ces séances est de prouver un énoncé mathématique qui affirme que les suites d’ensembles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construit via le procédé de la feuille II convergent vers un ensemble limite “fractal” E_∞ . La preuve n’est pas très facile (parce que le procédé est très général), mais nous essaierons de vous la faire trouver pas à pas. Au passage, on entendra un théorème fondamental des mathématiques (qui intervient à plusieurs reprises en Licence) : le théorème du point fixe contractant.

Feuille V (jeudi 23/09) : l'hôtel de Hilbert Dans les séances précédentes, nous aurons construit de nombreux sous-ensembles du plan ayant des propriétés assez bizarres (auto-similarité, courbes bornées de longueur infinie, etc.). À l'origine de telles propriétés “bizarres”, il y a certains comportements bizarres plus généraux des ensembles infinis. La feuille V vous permettra de découvrir certaines de ces propriétés, au travers d'une sorte de jeu mathématique dû au mathématicien David Hilbert. Vous comprendrez au passage qu'il existe non pas un, mais plusieurs infinis³.

Feuille VI (vendredi 24/09 si on n'a pas de retard) : construction de $\mathbb{R}$ Durant ces deux semaines, nous aurons construit de nombreux sous-ensembles, parfois fort compliqués, du plan $\mathbb{R}^2$. Mais au fait, savez-vous définir le plan $\mathbb{R}^2$ lui-même (ou l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, c'est équivalent) ? C'est ce que proposons de faire ce dernier jour de la manière la plus concrète possible, à l'aide de l'écriture décimale.

³Les différentes sortes d'infinis jouent entre autres un rôle absolument fondamental en Théorie de la Mesure, enseignée au premier semestre de Licence de Maths Fondamentales

Premiers ensembles fractals : exercices

Nous vous proposons deux exercices :

- tout d’abord, un exercice qui montrent, sur des exemples, les propriétés un peu étranges de la longueur ou l’aire des sous-ensembles fractals du plan. Cet exercice devrait être l’occasion de vous remettre en mémoire quelques faits élémentaires sur des séries numériques ;
- puis un exercice sur les opérations ensemblistes d’union, d’intersection et de passage au complémentaire. Vous y démontrerez des propriétés qui seront utiles dans la suite. Par ailleurs, les solutions des questions de cet exercice sont tout à fait typiques de preuves qu’il vous faut maîtriser.

Bizzareries : aire et longueur des ensembles fractals (2h)

Question 1. Le flocon de neige

- a. Calculer l’aire du flocon de neige de Von Koch.
- b. Calculer la longueur de la courbe-frontière à chaque étape. Quelle est la longueur de la courbe-limite ?

Question 2. Le triangle de Sierpinski

- a. Constater que le triangle de Sierpinski est obtenu en recollant trois petites copies du triangle de Sierpinski.
- b. En déduire une équation portant sur l’aire du triangle de Sierpinski. En déduire l’aire du triangle de Sierpinski.
- c. Le triangle de Sierpinski est-il l’ensemble vide ?
- d. Quel est la taille du plus gros carré contenu dans E_n ? Quel est la taille du plus gros carré contenu dans le triangle de Sierpinski ? Quelle est le rayon du plus gros disque contenu dans le triangle de Sierpinski ?

On dit que cet ensemble est d’intérieur vide.

Démonstrations en théorie des ensembles (3h)

Dans tous l’exercice, on se donne un ensemble E , et des parties de E notées A, B, A_i, B_i (pour i appartenant à $\mathbb{N}$).

Question 1. Complémentaire et union/intersection

Compléter les formules, et les prouver avec le plus de détails possible.

- a. $E \setminus (A \cup B) =$
- b. $E \setminus (A \cap B) =$
- c. (on peut avoir besoin de la question 2)
 $E \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) =$
- d. $E \setminus \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) =$

Question 2. Écriture avec quantificateurs

Compléter en utilisant des quantificateurs.

- a. $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \Leftrightarrow \dots$
- b. $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \Leftrightarrow \dots$
- c. $x \in E \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \Leftrightarrow \dots$
- d. $x \in E \setminus \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \Leftrightarrow \dots$
- e. Application : réécrire de manière (un peu) plus simple la formule définissant l'ensemble E_∞ pour le tapis de Sierpinski.

Question 3. Applications et union/intersection

Ici, on se donne de plus un ensemble F , et une application $f : E \rightarrow F$.

- a. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$? Trouver un contre-exemple, puis trouver une hypothèse sur f qui rende la formule vraie, et la prouver dans ce cas.
- b. Mêmes questions en remplaçant l'intersection par une union.
- c. Mêmes questions pour des unions ou intersection infinies.

Question 4. Union d'intersections

A-t-on

$$\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i) \quad ?$$

- a. Prouver l'inclusion directe ($\subset$).
- b. Trouver un contre-exemple pour l'inclusion réciproque.
- c. On fait l'hypothèse que la suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est *décroissante*, ce qui signifie qu'on a $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n . Montrer la formule sous cette hypothèse supplémentaire.

W. Sierpinski, N. F. H. von Koch et B. Mandelbrot

Waclaw Sierpinski (1882-1969) est le principal fondateur et sûrement le plus important des membres de l'école polonaise de théorie des ensembles et de topologie. On doit à Sierpinski de très nombreux travaux sur la théorie abstraite des ensembles (axiome du choix,...), la topologie de $\mathbb{R}$ et du plan $\mathbb{R}^2$ (par exemple, la construction du tapis qui porte son nom), et les suites et séries de fonctions. En formant de nombreux mathématiciens polonais, et en fondant la revue polonaise *Fundamenta Mathematicae* (une des meilleures revues mondiale dans le domaine de la topologie), il a contribué de manière vraiment fondamentale au développement des mathématiques en Pologne dans des conditions particulièrement dures : avant la première guerre mondiale, la Pologne était occupée par la Russie qui cherchait à éviter à tout prix le développement d'une élite intellectuelle en Pologne ; pendant la première guerre mondiale, il a été interné en Russie (avant d'être libéré grâce à l'intervention des mathématicien russes Egorov et Luzin) ; et durant la seconde guerre mondiale, il a continué à enseigner à l'Université de Varsovie, devenue clandestine sous l'occupation nazie.



Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924) est un mathématicien suédois, à qui on doit plusieurs travaux sur les nombres premiers, mais qui est surtout connu pour sa construction d'une courbe continue qui n'admet de tangente en aucun point : la courbe de von Koch.

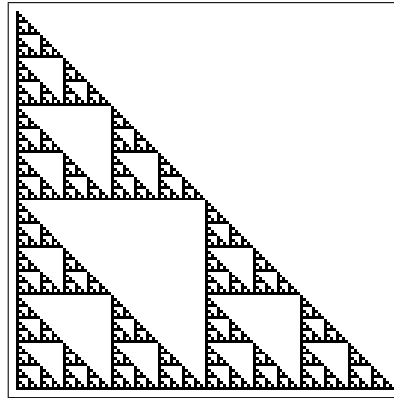


Benoît Mandelbrot (né en 1924) est un mathématicien Français, né à Varsovie, ayant fait l'essentiel de sa carrière aux États-Unis, et connu comme le père de la notion d'ensemble *fractal*. Sa position parmi les mathématiciens est assez originale puisque, bien que n'ayant démontré aucun résultat important ou difficile, il a mis le doigt sur l'un des concepts mathématiques les plus féconds des cinquantes dernières années. Les notions de fractale et d'auto-similarité permettent en effet de modéliser simplement de nombreux phénomènes qui semblent au premier abord extrêmement complexes. Mandelbrot est professeur à l'Université de Yale.



Introduction aux fractales obtenues par “IFS”

Retour sur le triangle de Sierpinski



Sur le dessin du triangle de Sierpinski, on voit qu’il est “égal à trois petites copies de lui-même”. On dit qu’il est *auto-similaire*.

Soyons plus précis. On reprend la construction mathématique de cet ensemble donnée dans le tout premier exercice du stage ; rappelons qu’on partait du carré $E_0 = [0, 1] \times [0, 1]$. On note T_1, T_2, T_3 les homothéties de rapport $1/2$ et de centres respectifs $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Alors on a l’égalité

$$E_\infty = T_1(E_\infty) \cup T_2(E_\infty) \cup T_3(E_\infty).$$

Mieux, on constate qu’on a

$$E_1 = T_1(E_0) \cup T_2(E_0) \cup T_3(E_0),$$

$$E_2 = T_1(E_1) \cup T_2(E_1) \cup T_3(E_1),$$

et plus généralement, pour tout entier positif n ,

$$(*) \quad E_{n+1} = T_1(E_n) \cup T_2(E_n) \cup T_3(E_n).$$

Remarque Ceci permet de définir la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de $E_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ et la relation de récurrence $(*)$. On obtient ainsi une définition plus agréable que la formule qu’on a écrite dans le premier exercice du stage.

a. (question technique importante) Montrer formellement l’égalité d’auto-similarité,

$$E_\infty = T_1(E_\infty) \cup T_2(E_\infty) \cup T_3(E_\infty)$$

en utilisant la relation $(*)$. **Aide** : rappelez-vous comment on a défini formellement l’ensemble “limite” E_∞ ; et citer précisément les propriétés que vous utilisez (*cf.* l’exercice de théorie des ensembles).

b. (question technique optionnelle) Montrer que les ensembles E_n , donnés par la formule du premier exercice du stage, vérifient bien la relation (*).

c. (optionnelle) Auto-similarité “forte” En déduire cette autre version de l’auto-similarité : le triangle de Sierpinski E_∞ est égal à l’union d’un nombre fini de copies “arbitrairement petites” de lui-même. Ce que l’on traduit par l’énoncé précis : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre ℓ et des homothéties $T'_1, \dots, T'_\ell$ telles que :

- $E_\infty = T'_1(E_\infty) \cup \dots \cup T'_\ell(E_\infty)$;
- les applications $T'_1, \dots, T'_\ell$ sont des homothéties de rapports au plus égal à ϵ .

Aide : essayer d’abord avec $\epsilon = 1/4$; résolvez la question graphiquement, puis formellement.

Ces propriétés sont illustrées sur la page <http://classes.yale.edu/fractals/>, partie 1.A (Self-Similarity).

IFS, des dessins par milliers

Où en est-on ? Rappelons notre but : nous cherchons à définir mathématiquement des ensembles compliqués (“fractals”). Dans cette feuille, on va décrire un procédé général pour construire des suites de parties du plan. On montrera plus tard que les suites d’ensembles construites selon ce procédé “convergent” : nous définirons alors des ensembles fractals comme limite de ces suites de parties du plan.

Dans l’exercice précédent, on a obtenu le triangle de Sierpinski comme “limite” d’une suite d’ensembles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence à l’aide d’homothéties : pour tout n , on a

$$E_{n+1} = T_1(E_n) \cup T_2(E_n) \cup T_3(E_n)$$

où T_1 , T_2 et T_3 sont des homothéties bien choisies.

On va généraliser ce procédé de construction. On joue donc au jeu suivant. On se donne un certain nombre de transformations $T_1, \dots, T_p$. On se donne aussi un ensemble de départ E_0 . On prend l’image de cet ensemble par chacune de nos transformations, et on prend la réunion : on obtient ainsi l’ensemble

$$E_1 := T_1(E_0) \cup \dots \cup T_p(E_0).$$

Et on recommence avec E_1 ... Autrement dit, on définit (par récurrence) une suite d’ensembles en posant

$$E_{n+1} := T_1(E_n) \cup \dots \cup T_p(E_n).$$

Ce procédé s’appelle *système de fonctions itérées* (en anglais, Iterated Functions System ou IFS).

Question 1. Exemple

Dessiner les premières étapes pour les données suivantes :

- $p = 4$;
- les applications $T_1, \dots, T_4$ sont des homothéties de rapport $1/3$, et leurs centres sont respectivement les points $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$;
- E_0 est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

Question 2. Problème inverse

Dans cette question, on joue au “problème inverse” : autrement dit, on considère un dessin (qui a été obtenu par un IFS), et on cherche à retrouver les transformations $T_1, \dots, T_p$ et l’ensemble E_0 utilisés.

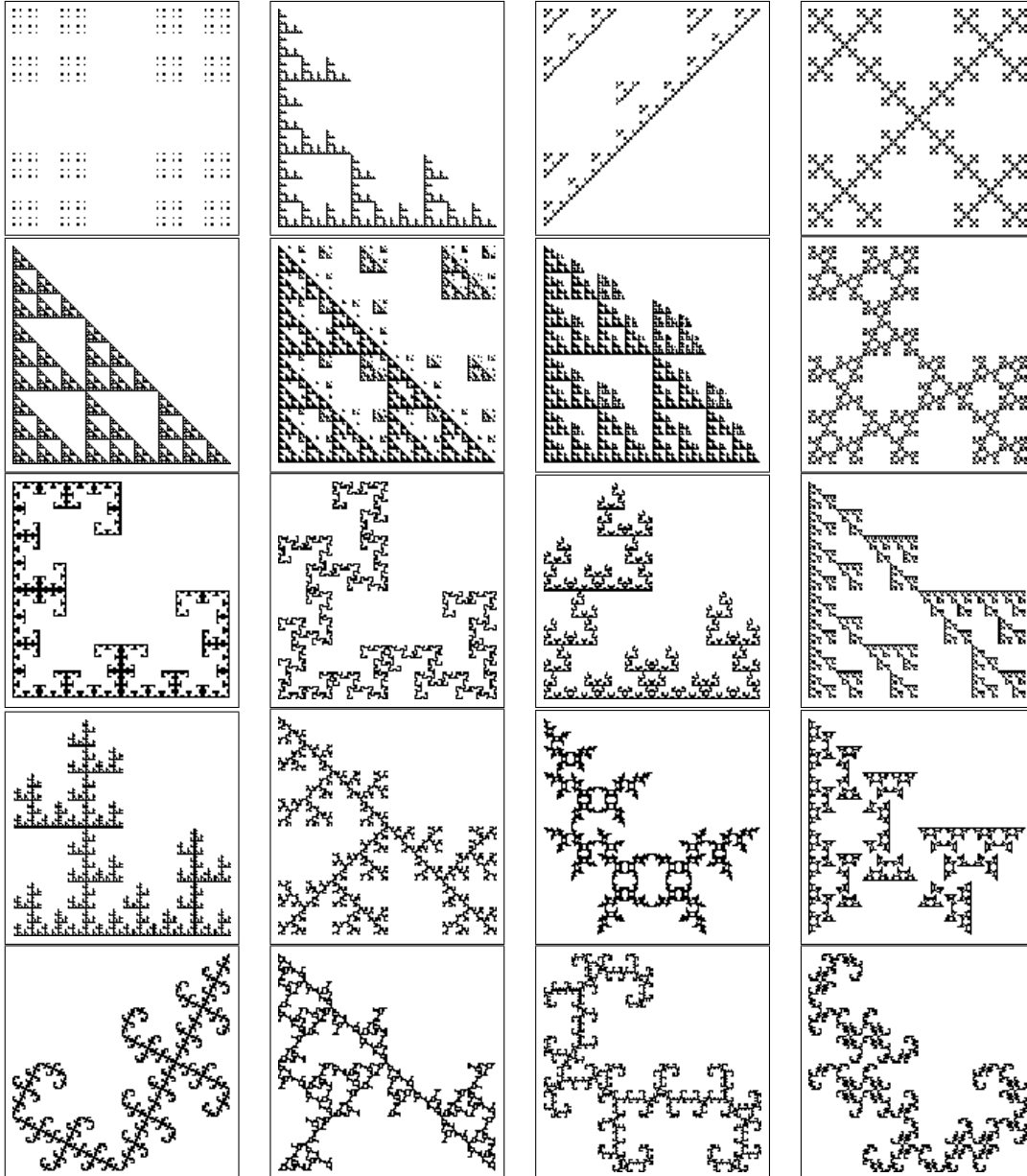
- a. Résoudre le problème inverse pour quelques-uns des 20 dessins ci-dessous.
- b. Même question pour la courbe de Von Koch (cf. feuille I.1, question 4).

c. (question technique optionnelle) Montrer que “l’antenne de télé” est invariante par le procédé :

$$E_\infty = T_1(E_\infty) \cup \dots \cup T_p(E_\infty).$$

On utilisera la définition des ensembles E_n par l’IFS, et la définition de E_∞ comme réunion de tous les ensembles E_n .

Remarque : on a déjà vu cette propriété, appelée *auto-similarité*, pour le triangle de Sierpinski.



Question 3. Changement de l'ensemble de départ E_0 (1/2h)

Voici une question (graphique) qui est importante pour la suite de l'histoire. On voudrait comprendre comment change l'ensemble "limite" des procédés décrits ci-dessus lorsqu'on change l'ensemble de départ E_0 , tout en gardant les mêmes transformations $T_1, \dots, T_p$.

Dans la feuille II.0, on a vu qu'on pouvait obtenir le triangle de Sierpinski par un IFS : les transformations T_1, T_2, T_3 sont trois homothéties de rapport $1/2$, et l'ensemble E_0 était le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

On reprend le procédé de construction du triangle de Sierpinski. On garde les mêmes applications T_1, T_2, T_3 que précédemment, mais on change l'ensemble de départ E_0 .

- Faire un dessin lorsqu'on prend pour E_0 le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ (représentez notamment l'ensemble E_3).
- Même question lorsqu'on prend pour E_0 un disque (par exemple, le disque inscrit dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$).
- Même question lorsqu'on prend pour E_0 un point (par exemple, le point $(0, 0)$).
- Que pensez-vous des différents ensembles limites ?

Question 4. (optionnelle) L'ensemble de Cantor

- Dessinez l'IFS obtenu pour les données suivantes : $p = 2$, $T_1 : (x, y) \mapsto (x/3, y/3)$, $T_2 : (x, y) \mapsto (x/3 + 2/3, y/3)$, E_0 est le segment $[0, 1] \times \{0\}$.

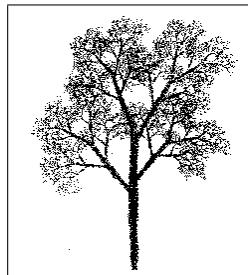
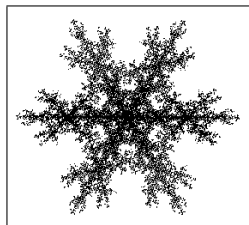
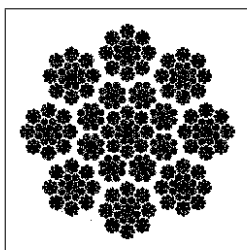
L'ensemble "obtenu à la limite" s'appelle *l'ensemble de Cantor*.

- (question technique)** Donner une définition formelle de l'ensemble-limite. Donner une autre définition de la suite d'ensembles, du même type que la première définition formelle du triangle de Sierpinski (feuille I, question 1).

Question 5. (optionnelle) Autres problèmes inverses

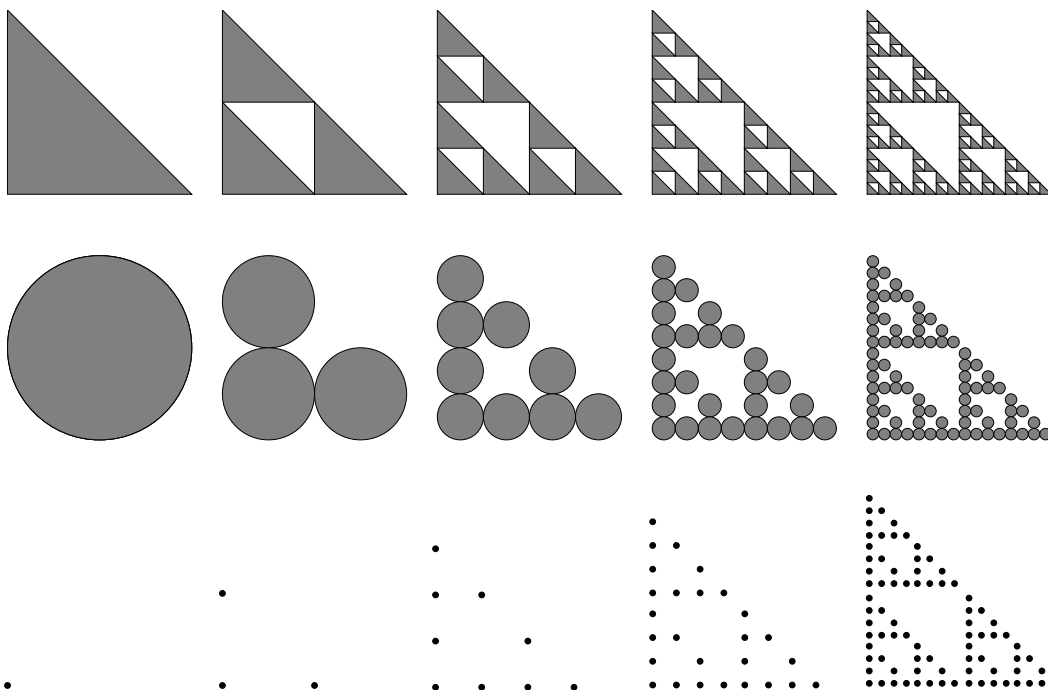
De manière plus surprenante, on arrive à obtenir par IFS des dessins plus compliqués, qui ressemblent parfois à des objets naturels. Par exemple, les dessins suivants ont été obtenus comme limite d'IFS.

Pour chaque dessin, on demande de dessiner l'image du cadre du dessin par chacune des applications qui définissent l'IFS. **Aide :** Le nombre p d'applications recherchées est respectivement 9, 7, 6 et 4. Les solutions se trouvent sur le site <http://classes.yale.edu/Fractals/>, dans la partie 1.F ("inverse problems"), paragraphe "natural fractals".



IFS : bilan

Changement de l'ensemble de départ E_0 (Question 3)



Début de construction d'un énoncé

Nous avons fait beaucoup de dessins, il est temps d'essayer d'extraire de toutes ces expériences un énoncé mathématique.

Cet énoncé devrait ressembler à ceci :

ÉBAUCHE D'ÉNONCÉ *On se donne*

- un entier p ;
- des transformations du plan dans lui-même $T_1, \dots, T_p$;
- une partie E_0 du plan.

On définit la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties du plan par la relation de récurrence

$$E_{n+1} := T_1(E_n) \cup \dots \cup T_p(E_n).$$

Alors la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ "converge" vers un ensemble E_∞ .

Où va-t-on ? Il nous faut préciser cet énoncé. La première chose à faire sera de préciser le sens du verbe “converger”. *Ceci sera l’objet de la feuille III.*

Une fois qu’on aura défini ce mot, on aura vraiment un énoncé mathématique, c’est-à-dire un énoncé qui sera vrai ou faux. S’il est faux, on pourra le réfuter par un contre-exemple, et chercher si on peut renforcer les hypothèses pour qu’il devienne vrai. S’il semble vrai, on pourra aussi essayer de renforcer la conclusion (obtenir plus de propriétés). Et il faudra le prouver ! *Ceci sera l’objet de la feuille IV.*

Digression : transformations du plan (2h)

IFS, logiciels et algèbre linéaire

Jouer au problème inverse, c'est bien joli, mais comment vérifier si les transformations que l'on a trouvées sont les bonnes ? Il y a des logiciels pour ça : on leur donne des transformations, un ensemble de départ, et ils tracent successivement les ensembles $E_1, E_2, \dots$. Vous pouvez trouver des logiciels gratuits sur le Web.⁴

Comment rentre-t-on les transformations dans les logiciels ?

Chaque transformation T est vue comme composée de trois applications ; la première sert à contracter/dilater la figure, la seconde la fait tourner, la troisième la translate. Plus précisément, on introduit les vecteurs de la base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. On voit T comme composée successive de f, g, h où :

- f est une application linéaire qui préserve les directions horizontales et verticales (c'est-à-dire qui envoie e_1 sur un vecteur $\lambda_1 e_1$ colinéaire à e_1 et e_2 sur un vecteur $\lambda_2 e_2$ colinéaire à e_2) ;
- g est une application linéaire qui tourne le vecteur e_1 d'un angle θ_1 et le vecteur e_2 d'un angle θ_2 , en préservant leur norme.
- h est une translation, de vecteur (a, b) .

On doit donc fournir au logiciel les valeurs des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2, a, b$.

Ceci soulève un problème : *est-il toujours possible de décomposer notre transformation T de cette manière ?*

Question 1. Exemples

a. Trouver une telle décomposition pour les transformations définissant "l'antenne de télé". Autrement dit, remplir le tableau suivant.

	λ_1	λ_2	θ_1	θ_2	a	b
T_1						
T_2						
T_3						
T_4						
T_5						

b. Trouver une telle décomposition pour les transformations définissant la courbe de Von Koch (voir feuille I.1, question 4).

⁴ Par exemple
<http://classes.yale.edu/fractals/>
puis aller dans "java software", "deterministic IFS"
ou
<http://classes.yale.edu/fractals/Software/detifs.html>.

	λ_1	λ_2	θ_1	θ_2	a	b
T_1						
T_2						
T_3						
T_4						

Question 2. Résultat général

a. Démontrer que toute application linéaire peut s'écrire comme composée de deux applications f et g comme ci-dessus. **Aide** : on peut commencer par faire une analyse du problème : *si c'était vrai*, que vaudraient les quatre paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2$?...

Dans ces logiciels, on peut donc "rentre" n'importe quelle application qui est la composée d'une application linéaire et d'une translation. Ces applications s'appellent des applications affines.

b. Démontrer que cette décomposition est unique (presque toujours, préciser les hypothèses).

c. Traduire la proposition en un énoncé de décomposition des matrices 2×2 .

Similitudes

Motivation Presque toutes les fractales que nous avons vues sont obtenues avec des transformations particulières, appelées *similitudes*. Dans la phase de formalisation, quand on écrira un énoncé précis et qu'on le démontrera, on se restreindra aux similitudes, ce qui donne des démonstrations un peu plus simples (on exclut la fougère, l'arbre et le flocon de la feuille II.1, question 5, mais aussi les dessins où on doit utiliser des réflexions).

Question 1. Similitudes linéaires

DÉFINITION Les *similitudes linéaires* sont les applications du plan dans lui-même obtenues comme composées d'une homothétie linéaire (c'est-à-dire de centre $(0,0)$) et d'une rotation linéaire.

a. Donner une définition matricielle des similitudes linéaires. Autrement dit, compléter l'énoncé suivant :

Une similitude linéaire est une application linéaire du plan dans lui-même dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est de la forme

b. On identifie le plan $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$. Donner une définition des similitudes linéaires à l'aide des nombres complexes. Autrement dit, compléter l'énoncé suivant :

Une similitude linéaire est une application du plan dans lui-même de la forme $z \mapsto \dots$.

Donner le lien entre l'écriture matricielle et l'écriture complexe.

Question 2. Similitudes affines

Dans un logiciel de dessin, on peut modifier l'image de la façon suivante :

- on peut l'agrandir ou la rétrécir ("zoom") ;
- on peut la faire pivoter d'un angle arbitraire ;
- on peut la translater.

Une application qui est obtenue comme composée de ces trois opérations s'appelle une *similitude affine*.

Autrement dit, mathématiquement :

DÉFINITION Une *similitude affine* est la composée d'une homothétie (de centre quelconque), d'une rotation (de centre quelconque) et d'une translation.

a. On se donne une similitude affine T . Donner l'écriture de T à l'aide des nombres complexes, en fonction des données qui définissent T (rapport et centre de l'homothétie, *etc.*).

b. En fait, les nombres complexes fournissent une définition beaucoup plus simple. Montrer qu'une application T du plan dans lui-même est une similitude affine si et seulement si elle est de la forme $z \mapsto az + b$, où a et b sont des nombres complexes (presque) quelconques.

En déduire une définition des similitudes affines en fonction des similitudes linéaires.

Montrer que (presque) toute similitude affine peut s'obtenir en composant une homothétie et une rotation *de même centre*.

c. **question importante** Soit $z \mapsto az + b$ une similitude. On appelle *rapport* de la similitude le nombre $\lambda = |a|$, et *angle* de la similitude l'argument de a . Montrer qu'une similitude multiplie les distances entre les points du plan d'un facteur λ , autrement dit que

$$d(T(A), T(B)) = \lambda d(A, B)$$

où d est la distance euclidienne.

d. Dans les tableaux utilisés par les logiciels qui dessinent des IFS, et décrits dans l'exercice précédent, à quoi reconnaît-on une similitude ?

Question 3. Groupes

a. Montrer que la composée de deux similitudes linéaires est encore une similitude linéaire.

b. Montrer que la composée de deux similitudes affines est encore une similitude affine. Que valent le rapport et l'angle de la composée ?

c. Que donne la composée de deux rotations de centres différents ? De deux homothéties de centres différents ? De deux translations ?

d. *Les similitudes (linéaires ou affines) forment un **groupe** : chaque similitude affine est une bijection et son inverse est encore une similitude affine, et la composée de deux similitudes affines est encore une similitude affine.* L'ensemble des rotations n'est pas un groupe, quelles transformations faudrait-il rajouter ? Les homothéties forment-elles un groupe ? Les translations forment-elles un groupe ?

Question 4. Applications conformes

a. Soit T une application linéaire du plan dans lui-même. Montrer que T est une similitude si et seulement si elle "préserve les angles". **Aide** : commencer par proposer une définition de "préserver les angles" ; utiliser la décomposition des applications linéaires vue dans l'exercice précédent.

b. On considère l'application $\Phi : z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. En identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, on voit Φ comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Calculer la différentielle de Φ au point $(0, 0)$, puis en un point (x_0, y_0) non nul. L'application Φ préserve-t-elle les angles ?

Les applications qui préservent les angles sont appelées applications conformes. Cette propriété est bien utile (les textes ou dessins ne sont pas "déformés" dans notre logiciel!).

Transformations du plan : corrigé

IFS, logiciels et algèbre linéaire

Corrigé de la question 2

On peut traduire le problème matriciellement. Les applications f et g décrites par l'énoncé ont pour matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

et la matrice de leur composée $g \circ f$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \cos(\theta_1) & \lambda_2 \cos(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) \\ \lambda_1 \sin(\theta_1) & \lambda_2 \sin(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

Analyse du problème ⁵

Considérons une application linéaire Φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (qui est orthonormée pour le produit scalaire habituel). Supposons que Φ puisse s'écrire $g \circ f$ avec f et g comme ci-dessus. Alors on a

$$\Phi(e_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos(\theta_1) \\ \lambda_1 \sin(\theta_1) \end{pmatrix} \text{ et } \Phi(e_2) = \begin{pmatrix} \lambda_2 \cos(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) \\ \lambda_2 \sin(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}.$$

On voit que λ_1 doit être la norme euclidienne du vecteur $\Phi(e_1)$, et θ_1 est l'angle entre les vecteurs $\Phi(e_1)$ et e_1 . Même chose pour λ_2 et θ_2 .

Après cette analyse du problème, écrivons la démonstration.

Démonstration Considérons une application linéaire Φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (qui est orthonormée pour le produit scalaire habituel). On note λ_1 la norme euclidienne du vecteur $\Phi(e_1)$, θ_1 l'angle que fait ce vecteur avec le vecteur e_1 (ceci est bien défini si $\Phi(e_1)$ n'est pas le vecteur nul ; sinon, on peut prendre n'importe quelle valeur pour θ_1). De même, on note λ_2 la norme euclidienne du vecteur $\Phi(e_2)$ et θ_2 l'angle que fait ce vecteur avec le vecteur e_2 . Avec ces valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2$, on définit f et g comme dans l'énoncé. Alors on vérifie facilement (...) que Φ est égale à la composée $g \circ f$.

Preuve de l'unicité Pour montrer l'unicité, il suffit de recopier ce qu'on a écrit dans l'analyse du problème ! En effet, l'analyse montre que *si f et g existent*, alors on n'a pas le choix pour les valeurs des paramètres (λ_1 doit être la norme euclidienne de e_1 , etc.). Il y a une exception, c'est si l'un des vecteurs images $\Phi(e_1)$ ou $\Phi(e_2)$ est nul : dans ce cas, θ_1 (ou θ_2) peut prendre n'importe quelle valeur. En résumé : *si Φ est injective, la décomposition est unique*.

⁵Cette phase du raisonnement est parfois appelée *analyse*. D'un point de vue logique, on a l'impression de raisonner à l'envers, et d'ailleurs, pour démontrer le résultat, on doit "tout réécrire dans l'autre sens". Cependant, c'est cette phase qui permet de trouver ce qu'il faut écrire... De plus, elle donne souvent une preuve de l'unicité (voir plus bas).

Décomposition des matrices Voici une possibilité.

ÉNONCÉ Soit M une matrice réelle, de taille 2×2 , de rang 2. Alors il existe un unique couple (A, B) de matrices réelles de taille 2×2 telles que $M = AB$ avec

- B une matrice diagonale ;
- A une matrice dont les deux vecteurs colonnes sont de norme 1.

Similitudes : corrigé

On va identifier en permanence $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. En particulier, si T est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et z un nombre complexe, on s'autorise à écrire $T(z)$ pour désigner "le nombre complexe correspondant à l'image par T du point correspondant au nombre complexe z "...

Question 1. Similitudes linéaires

a. Définition matricielle des similitudes linéaires Une similitude linéaire est une application linéaire du plan dans lui-même dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda \cos(\theta) & -\lambda \sin \theta \\ \lambda \sin \theta & \lambda \cos \theta \end{pmatrix}$$

où λ est un réel strictement positif, et θ un réel quelconque.

b. Définition des similitudes linéaires à l'aide des nombres complexes Une similitude linéaire est une application du plan dans lui-même de la forme $z \mapsto az$ où a est un nombre complexe non nul.

Lien : $a = \lambda e^{i\theta}$.

Question 2. Similitudes affines

a. Notons T_1 l'homothétie, λ son rapport et c_1 le nombre complexe correspondant à son centre ; alors on a $T_1(z) = \lambda(z - c_1) + c_1$. Notons T_2 la rotation, θ son angle et c_2 son centre ; alors on a $T_2(z) = e^{i\theta}(z - c_2) + c_2$.

On a donc $T(z) = T_2 \circ T_1(z) = e^{i\theta}(\lambda(z - c_1) + c_1 - c_2) + c_2$.

b. Définition plus simple

- En développant l'expression trouvée à la question précédente, on obtient bien $T(z)$ sous la forme $az + b$ avec $a = \lambda e^{i\theta}$ et $b = -\lambda e^{i\theta}c_1 + e^{i\theta}(c_1 - c_2) + c_2$.
- Réciproquement, soit $a = \lambda e^{i\theta}$, supposé différent de 1 et b deux nombre complexes ; alors l'application $z \mapsto az + b$ est une similitude, composée de l'homothétie de rapport λ et de centre $c = b/(1 - a)$, et de la rotation de même centre c et d'angle θ .

Remarques :

- On a trouvé le centre commun en cherchant un point fixe pour T , c'est-à-dire en résolvant l'équation $T(z) = z$;
- De plus, puisque la rotation et l'homothétie ont le même centre, on a répondu au passage à la question posée plus bas.
- Que se passe-t-il si $a = 1$?

Définition des similitudes affines en fonction des similitudes linéaires Une similitude affine est la composée d'une similitude linéaire et d'une translation. En effet, l'application $z \mapsto az + b$ peut s'obtenir en composant la similitude $z \mapsto az$ et la translation $z' \mapsto z' + b$.

c. Similitudes et distance On utilise la notation complexe, et le fait que la distance euclidienne entre les points du plan z_1 et z_2 est donnée par $|z_2 - z_1|$. Et le calcul est très facile.

d. Définition matricielle des similitudes affines En notant X les points du plan, les similitudes affines sont les applications

$$X \mapsto AX + B$$

où A est une matrice de similitude linéaire, et B un vecteur quelconque.

Dans les tableaux utilisés par les logiciels qui dessinent des IFS, et décrits dans l'exercice précédent, on obtient une similitude si

- les deux coefficients de contraction λ_1 et λ_2 sont égaux ;
- et les deux angles θ_1 et θ_2 sont égaux.

Question 3. Groupes

a. Composée de deux similitudes linéaires Si on compose $z \mapsto az$ avec $z \mapsto a'z$, on obtient l'application $z \mapsto a''z$, avec $a'' = aa'$, qui est donc encore une similitude linéaire.

b. Composée de deux similitudes affines Ici encore, c'est très facile avec les nombres complexes (...). De plus, on voit que les rapports se multiplient, et les angles s'ajoutent (comme pour les homothéties ou les rotations).

c. Composée de deux rotations de centres différents Les rotations sont en particulier des similitudes, donc on doit trouver une similitude (d'après la question précédente). D'autre part, on ne trouve pas toujours une rotation !

Pour être plus précis, on peut encore utiliser l'écriture complexe. On peut notamment montrer que

- la composée de deux rotations dont les angles ne sont pas opposés est encore une rotation ;
- la composée de deux rotations dont les angles sont opposés est une translation.

Le résultat pour les composées d'homothéties est similaire. Par contre, la composée de deux translations est bien une translation.

d. Que faut-il rajouter aux rotations pour avoir un groupe ? On a vu que la composée de deux rotations est une rotation ou bien une translation ; et on peut voir facilement qu'on peut obtenir n'importe quelle translation du plan comme composée de deux rotations. Du coup, pour avoir un groupe, il faut au minimum rajouter toutes les translations. Finalement, on montre qu'on a maintenant un groupe : *l'ensemble des applications du plan obtenues comme composées d'une rotation et d'une translation est un groupe.*

Le résultat est similaire pour les homothéties : *l'ensemble des applications du plan obtenues comme composées d'une homothétie et d'une translation est un groupe.* Et, bien sûr, l'ensemble des translations est un groupe. Pouvez-vous trouver d'autres exemples de groupes d'applications affines ?...

Topologie : propriétés de base

Feuille non rédigée.

Quelques exercices sur les propriétés de base de topologie.

On se place dans $\mathbb{R}^2$. Définition des ouverts, des fermés ; un miracle : ils sont complémentaires.
L'intérieur, l'adhérence. La frontière...

Distance de Hausdorff : recherche

Où en est-on ?

Depuis le début de la semaine, nous avons considéré des suites d'ensembles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui semblaient “converger” vers un “ensemble limite”. Grâce à la notion d'IFS, nous avons même trouvé un procédé général pour produire de telles suites d'ensembles. Nous en sommes donc arrivés hier à énoncer la conjecture suivante :

CONJECTURE *On se donne*

- *un entier p ;*
- *des transformations du plan dans lui-même $T_1, \dots, T_p$;*
- *une partie E_0 du plan.*

On définit la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties du plan par la relation de récurrence

$$E_{n+1} := T_1(E_n) \cup \dots \cup T_p(E_n).$$

Alors la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ “converge” vers un ensemble E_∞ .

Avant de prouver cette conjecture, la première chose à faire est de lui donner un sens mathématique précis : il nous faut définir précisément ce que signifie qu'une suite de parties du plan *converge*, et ce qu'est la *limite* d'une suite convergente de parties du plan.

Convergence au sens de Hausdorff

Question 4. Définition de la convergence

Essayer de compléter la définition suivante :

DÉFINITION (à compléter) On dit qu'une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles bornés du plan converge vers une partie bornée E_∞ si....

Bien sûr, il faut que votre définition corresponde à l'intuition. Par exemple, il faut que votre définition soit telle que :

- La suite de disques $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ représentée à la figure 1 converge vers le singleton E_∞ .
- La suite d'ellipses remplies $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la figure 2 converge vers le segment vertical E_∞ .
- Si C est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1, et si, pour tout n , l'ensemble E_n est un polygone rempli régulier à n côtés dont les sommets sont situés sur le cercle C , alors la suite des polygones $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le disque E_∞ de centre $(0,0)$ et de rayon 1 (voir la figure 3).
- La suite d'ensembles finis $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la figure 4 converge vers le carré rempli E_∞ .

Indication. Utiliser la distance (usuelle) entre les points de $\mathbb{R}^2$.

Question 5. Unicité de la limite

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le disque fermé centré en $(0,0)$ de rayon $1 - 1/n$. Avec la définition ci-dessus, la suite de disques $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle vers le disque ouvert centré en $(0,0)$ de rayon 1, ou vers le disque fermé centré en $(0,0)$ de rayon 1 ?

b. (facultatif) Plus généralement, si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers une partie E_∞ au sens défini ci-dessus, montrer que la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers l'adhérence de E .

Les questions ci-dessus soulèvent un problème : en général, une suite de parties du plan peut converger vers plusieurs limites différentes (par exemple, un disque ouvert et le disque fermé correspondant). Pour résoudre ce problème, on décide de ne plus s'intéresser qu'aux parties *fermées* du plan : on ne considère plus que des suites de parties *fermées* qui convergent vers une partie *fermée*.

c. Montrer que, lorsqu'on se restreint aux parties fermées, il y a unicité de la limite, c'est-à-dire, montrer que : si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties fermées bornées du plan, qui converge vers une partie fermée bornée E_∞ , et qui converge aussi vers une partie fermée bornée E'_∞ , alors $E_\infty = E'_\infty$.

Question 6. Autre définition de la convergence

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties bornées du plan. Une suite de points *extraite* de la suite de parties $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : le point x_0 est dans E_0 , le point x_1 est dans E_1 , le point x_2 est dans E_2 , etc.

Montrer alors que la suite de parties $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une partie fermée bornée E_∞ si et seulement si E_∞ est l'ensemble de toutes les limites possibles des suites de points extraite de la suite de parties $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Distance de Hausdorff

La notion de convergence d'une suite de points dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ peut s'exprimer à l'aide des distances usuelles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$: une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point x_∞ si et seulement si la distance $d(x_n, x_\infty)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On aimerait bien, de la même façon, pouvoir exprimer la convergence d'une suite de parties du plan à l'aide d'une distance. Autrement dit, on voudrait définir une notion de distance $d_H(E, E')$ entre deux parties du plan E et E' (qu'on appelle *distance de Hausdorff*) de manière à avoir la propriété $(\star)$ suivante :

PROPRIÉTÉ $(\star)$ Une suite de parties fermées bornées $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une partie fermée bornée E_∞ si et seulement si la distance $d_H(E_n, E_\infty)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Question 7. Définition de la distance de Hausdorff

Proposer une définition pour la distance de Hausdorff $d_H(E, E')$ entre deux parties E et E' , de manière à ce que la propriété $(\star)$ soit satisfaite :

DÉFINITION (à compléter) La *distance de Hausdorff* $d_H(E, E')$ entre deux parties fermées bornées E et E' du plan est définie par la formule :

Question 8. Autre formule pour la distance de Hausdorff (facultatif)

Étant donnée deux parties fermées bornées E et E' , exprimer la distance de Hausdorff $d_H(E, E')$ en fonction des distances entre les différents points de E et E' (utiliser des sup, des inf, etc.).

Pour pouvoir travailler avec la distance de Hausdorff définie ci-dessus, il faut vérifier que cette "distance" satisfait les mêmes propriétés que la distance usuelle dans $\mathbb{R}^2$. C'est le but des deux questions suivantes.

Question 9. La distance de Hausdorff “sépare les ensembles”

Rappelons que, si la distance entre deux points x et x' de $\mathbb{R}^2$ est nulle, alors ces points sont égaux. Montrer que, de manière analogue, si E et E' sont deux parties fermées du plan telle que la distance de Hausdorff $d_H(E, E')$ est nulle, alors $E = E'$.

Indication. Si $E \neq E'$ alors, soit il existe un point de E qui est hors de E' , soit il existe un point de E' qui est hors de E . Par ailleurs, ne pas oublier que les complémentaires de E et E' sont ouverts.

Question 10. Inégalité triangulaire

Rappelons que, si x , x' et x'' sont trois points dans $\mathbb{R}^2$, alors on a $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$ (c'est évident sur un dessin). Montrer que, de manière analogue, si E , E' et E'' sont trois parties du plan, on a

$$d_H(E, E'') \leq d_H(E, E') + d_H(E', E'')$$

(c'est ce qu'on appelle *l'inégalité triangulaire*).

Annexe : figures

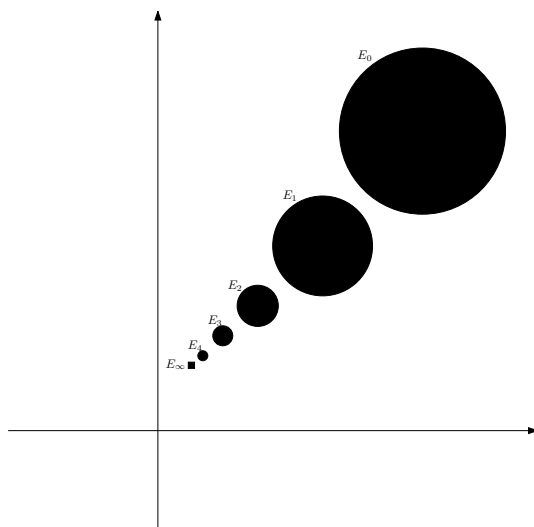


Figure 1. Une suite de disques convergeant vers un singleton.

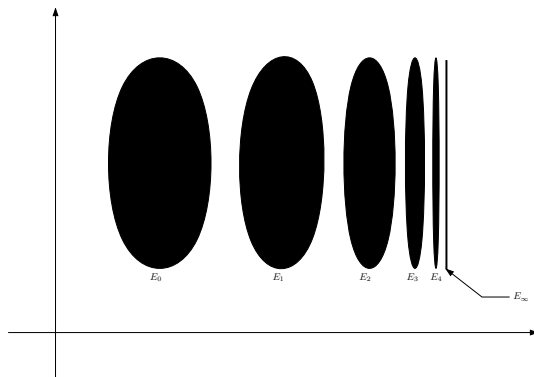


Figure 2. Une suite d'ellipses remplies convergeant vers un segment.

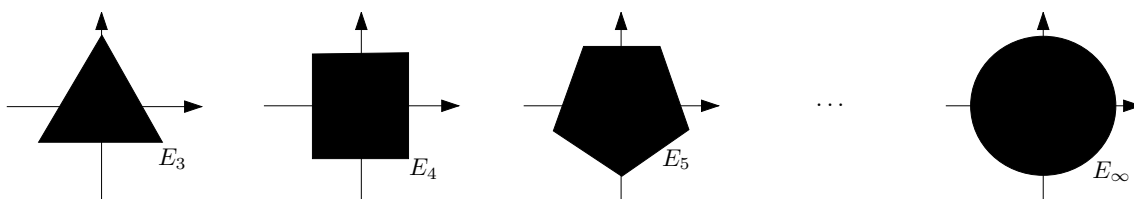


Figure 3. Une suite de polygones remplis convergant vers un disque.

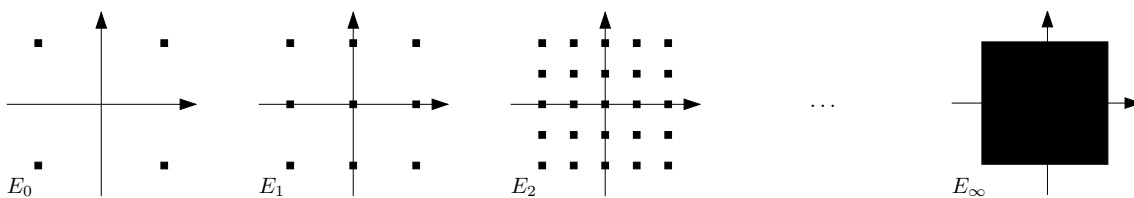


Figure 4. Une suite d'ensembles finis convergeant vers un carré rempli.

Distance de Hausdorff : bilan

Convergence au sens de Hausdorff

Définition de la convergence

Le but est de donner un sens précis au fait qu'une suite de parties $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du plan *converge* vers une partie E_∞ . Pour cela, il est commode d'introduire tout d'abord la notion *d' ϵ -voisinage* d'une partie du plan :

DÉFINITION Pour toute partie E du plan $\mathbb{R}^2$ et tout réel $\epsilon > 0$, on appelle *ϵ -voisinage de E* , et on note $V_\epsilon(E)$ la réunion de toutes les boules ouvertes de rayon ϵ centrées en un point de E .

Remarquons qu'un point x du plan est dans l' ϵ -voisinage d'une partie E du plan si et seulement si il existe un point y de E tel que la distance entre x et y est strictement inférieure à ϵ . Autrement dit, l' ϵ -voisinage d'une partie E peut être défini par la formule suivante :

$$V_\epsilon(E) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \text{il existe } y \in E \text{ tel que } d(x, y) < \epsilon\}$$

On peut maintenant définir la convergence d'une suite de parties du plan :

DÉFINITION On dira qu'une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties du plan $\mathbb{R}^2$ *converge au sens de Hausdorff* vers une partie E_∞ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, E_n est inclus dans $V_\epsilon(E_\infty)$ et E_∞ est inclus dans $V_\epsilon(E_n)$.

On peut alors remarquer que la convergence au sens de Hausdorff pour les suites de parties du plan généralise la notion usuelle de convergence pour les suites de points :

PROPOSITION Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points du plan. Cette suite de points converge (au sens usuel) vers un point x si et seulement si la suite de singletons $(\{x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Hausdorff vers le singleton $\{x\}$.

Unicité de la limite

On a ainsi défini une notion de convergence pour les suites de parties du plan. Cependant, on fait la remarque suivante :

REMARQUE Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le disque fermé centré en $(0, 0)$ de rayon $1 - 1/n$, alors la suite de disques $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (au sens de Hausdorff) à la fois vers le disque ouvert de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, et vers le disque fermé de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Autrement dit, une suite de parties du plan peut converger vers deux ensembles différents. C'est relativement gênant (c'est comme si une suite convergente de nombres réels pouvait avoir deux limites différentes...). Néanmoins, on peut résoudre ce problème en décidant de ne considérer que des parties fermées du plan, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION Soit (E_n) une suite de parties fermées bornées du plan. On suppose que la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Hausdorff vers une partie fermée E , et qu'elle converge aussi vers une partie fermée E' . Alors, $E = E'$.

Démonstration. Soit x un point de E . Soit $\epsilon > 0$. Puisque la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers E , il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, l'ensemble E est inclus dans l' ϵ -voisinage de E_n . Et puisque la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers E' , il existe un entier N' tel que, pour tout $n \geq N'$, l'ensemble E_n est inclus dans l' ϵ -voisinage de E' . Donc, pour tout $n \geq \max(N, N')$, l'ensemble E est inclus dans le (2ϵ) -voisinage de E' . En particulier, pour tout $n \geq \max(N, N')$, il existe un point y_n dans E' tel que $d(y_n, x) \leq 2\epsilon$. Soit y la limite de la suite y_n . On a alors $d(x, y) = 0$, c'est-à-dire $y = x$. De plus, puisque y_n est une suite de points de E' et que E' est fermé, y est dans E' . Donc $x \in E'$.

On a donc montré que tout point x de E est dans E' ; autrement dit, on a montré que E est inclus dans E' . On montre exactement de la même façon (en échangeant les rôles de E et E') que E' est inclus dans E . Par conséquent, on a bien $E = E'$. $\square$

Dorénavant, on ne considérera que des parties fermées du plan. Comme une suite de parties du plan ne peut pas converger vers deux parties fermées distinctes, on pourra parler de *la* limite d'une suite convergente de parties du plan.

Autre définition de la convergence au sens de Hausdorff

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties du plan. Une suite de points *extraite* de la suite de parties $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point x_0 est dans E_0 , le point x_1 est dans E_1 , le point x_2 est dans E_2 , etc. On peut alors montrer la proposition suivante :

PROPOSITION Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties du plan qui converge au sens de Hausdorff vers une partie fermée E_∞ . Notons E'_∞ l'ensemble de toutes les limites possibles pour les suites de points extraites de la suite de parties $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $E'_\infty = E_\infty$.

Cette proposition nous fournit une caractérisation bien utile de la limite d'une suite de parties convergente au sens de Hausdorff.

Distance de Hausdorff

La convergence d'une suite de points de $\mathbb{R}^2$ peut s'exprimer à l'aide de la distance (usuelle) sur $\mathbb{R}^2$: une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^2$ converge vers un point x si et seulement si la distance entre x_n et x tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On aimerait bien montrer que, de façon analogue, la convergence (au sens de Hausdorff) d'une suite de parties du plan puisse s'exprimer à l'aide d'une notion de distance entre les parties du plan. Ça n'est pas d'ur, il suffit de définir une distance comme suit :

DÉFINITION (*distance de Hausdorff*) Étant donné deux parties E et E' du plan, on appelle distance de Hausdorff entre E et E' le nombre

$$d_H(E, E') = \inf \{ \epsilon \mid E \subset V_\epsilon(E') \text{ et } E' \subset V_\epsilon(E) \}$$

Autrement dit, $d_H(E, E')$ est l'infimum de tous les ϵ tels que E est inclus dans l' ϵ -voisinage de E' et tel que E' est inclus dans l' ϵ -voisinage de E .

Il est alors clair que la convergence au sens de Hausdorff d'une suite de parties du plan peut s'exprimer à l'aide de la distance de Hausdorff :

FAIT Une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties du plan converge au sens de Hausdorff vers une partie E_∞ si et seulement si la distance de Hausdorff entre les parties E_n et E_∞ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

REMARQUE Soient E et E' deux parties du plan. En mettant ensemble la formule qui définit la distance de Hausdorff entre E et E' et la formule qui définit les ϵ -voisinages de E et E' , on obtient la formule suivante :

$$d_H(E, E') = \max \left(\sup_{x \in E} \inf_{y \in E'} d(x, y) , \sup_{x \in E'} \inf_{y \in E} d(x, y) \right)$$

Pour pouvoir manipuler facilement cette distance, il est utile de montrer qu'elle satisfait des propriétés identiques à celles de la distance dans $\mathbb{R}^2$. En particulier, on aura besoin des deux propriétés suivantes :

PROPOSITION *La distance de Hausdorff sépare les parties fermées de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire : si E et E' sont deux parties fermées de $\mathbb{R}^2$ telles que $d_H(E, E') = 0$, alors $E = E'$.*

Démonstration. On pourrait faire une preuve directe. Par paresse, nous allons plutôt nous raccrocher à un résultat démontré ci-dessus : l'unicité de la limite au sens de Hausdorff. Considérons la suite de parties fermées $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $E_n = E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge évidemment vers E au sens de Hausdorff. Par ailleurs, puisque $d_H(E, E') = 0$, on a $d_H(E_n, E') = 0$ pour tout n . Et donc, la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers E' au sens de Hausdorff. Par unicité de la limite (voir la proposition démontrée à la page précédente), et puisque E et E' sont fermées, on a donc $E = E'$. $\square$

PROPOSITION *La distance de Hausdorff satisfait l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire : si E , E' et E'' sont trois parties de $\mathbb{R}^2$, on a*

$$d_H(E, E'') \leq d_H(E, E') + d_H(E', E'')$$

Démonstration. Notons $\alpha = d_H(E, E')$ et $\beta = d_H(E', E'')$.

Montrons que E'' est inclus dans l' $(\alpha + \beta)$ -voisinage de E . Soit x'' un point de E'' . Puisque $d_H(E'', E') = \beta$, il existe un point x' dans E' de situé à une distance inférieure ou égale à β de x'' . Puisque $d_H(E', E) = \alpha$, il existe un point x dans E de situé à une distance inférieure ou égale à α de x' . Par l'inégalité triangulaire pour la distance usuelle entre les points de $\mathbb{R}^2$, on a $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'') \leq \alpha + \beta$. On a donc trouvé un point x dans E tel que $d(x, x'') \leq \alpha + \beta$. Donc x'' est dans l' $(\alpha + \beta)$ -voisinage de E . Comme x'' était un point quelconque dans E'' , ceci montre que E'' est inclus dans l' $(\alpha + \beta)$ -voisinage de E .

On montre exactement de la même façon que E est inclus dans l' $(\alpha + \beta)$ -voisinage de E'' . On a donc bien $d_H(E, E'') \leq \alpha + \beta = d_H(E, E') + d_H(E', E'')$. $\square$

Distance de Hausdorff : exercices

Question 1. Exemples de limites de suites de parties du plan

Notons C le carré $[-1, 1]^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Voici trois suites de parties du plan :

- la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où, pour tout n , l'ensemble A_n est l'intersection du carré C avec le graphe de la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x/n$;
- la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où, pour tout n , l'ensemble B_n est l'intersection du carré avec le graphe de la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = \sin(n\pi x)$.
- la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où, pour tout n , l'ensemble C_n est l'intersection du carré C avec le graphe de la fonction $h_n : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = \frac{1}{nx}$.

Lesquelles de ces suites convergent-elles au sens de Hausdorff ? Vers quelle ensemble limite ?

Question 2. Suites de disques

Prouver qu'une suite de disques, si elle converge, ne peut converger que vers un disque ?

Question 3. Suites de singletons

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points du plan qui converge (au sens usuel) vers un point x_∞ . Montrer que la suite des singletons $(\{x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le singleton $E_\infty = \{x_\infty\}$ au sens de Hausdorff.

Question 4. Distance de Hausdorff et construction de fractales

a. Le triangle de Sierpinski Évaluer (graphiquement) la distance de Hausdorff entre E_n et E_∞ dans la construction du triangle de Sierpinski.

b. L'antenne de télé, flocon et courbe de von Koch Même question.

Question 5. Densité des ensembles finis

Montrer que pour toute partie fermée bornée E de $\mathbb{R}^2$, il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties finies qui converge vers E (on dit que l'ensemble des parties finies est *dense* dans l'ensemble des parties compactes).

Indication : regarder la figure 4.

Question 6. Limite d'une suite de graphes

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le graphe de la fonction f_n . Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction si et seulement si la suite de partie $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le graphe d'une fonction.

F. Hausdorff

Felix Hausdorff (1868-1942) est un mathématicien allemand, dont les principaux travaux concernent la théorie des ensembles et la topologie. C'est notamment lui qui a introduit les définitions modernes d'espace topologique et d'espace métrique (deux notions que vous étudierez en Calcul Différentiel au premier semestre de Licence) (un exemple intéressant d'espace métrique est l'ensemble de tous les compacts de $\mathbb{R}^2$ muni de la distance de Hausdorff). C'est également lui qui a introduit la notion de dimension de Hausdorff : pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$, on peut définir sa dimension de Hausdorff qui est un nombre compris entre 0 et 2 (c'est 0 pour les points, 1 pour les droites, 2 pour le plan lui-même, et $\log 4 / \log 3$ pour la courbe de von Koch) ; une propriété caractéristique des ensembles fractals est qu'ils ont une dimension de Hausdorff qui n'est pas entière.

Condamné à une retraite forcée en 1935 par les lois anti-juifs, il n'a pas cherché à émigrer alors qu'il était encore temps. En 1942, comprenant qu'il ne pourrait plus éviter d'être arrêté et déporté dans un camp de concentration, il s'est suicidé avec sa femme et la sœur de celle-ci.



Convergence des IFS

Construction de la conjecture

Notion de convergence

Dans la feuille II, après avoir joué un peu avec les IFS, nous avons écrit une ébauche d'énoncé. Dans la feuille III, nous avons précisé la notion de convergence ; au passage, nous avons remarqué que si l'on voulait que cette notion de convergence fonctionne correctement, il fallait se restreindre aux parties fermées bornées. Tout ceci nous permet de préciser l'énoncé :

ÉBAUCHE D'ÉNONCÉ (BIS) *On se donne*

- un entier p ;
- des transformations du plan dans lui-même $T_1, \dots, T_p$;
- une partie **fermée bornée** K_0 du plan.

On définit la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties fermées bornées du plan par la relation de récurrence

$$K_{n+1} = T_1(K_n) \cup \dots \cup T_p(K_n).$$

Alors la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour la distance de Hausdorff : autrement dit, il existe une partie fermée bornée K_∞ du plan tel que

$$d_H(K_n, K_\infty) \rightarrow 0$$

quand n tend vers $+\infty$.

Hypothèses sur les transformations

Il nous faut encore travailler cet énoncé, en précisant les hypothèses portant sur les transformations T_i . Pour simplifier, nous avons décidé de nous limiter aux similitudes (*cf.* feuille II). D'autre part, quelques essais montrent que l'énoncé est faux si on ne rajoute pas une hypothèse de contraction :

DÉFINITION Une similitude affine est dite *contractante* si elle diminue les distances, autrement dit si son rapport λ est strictement plus petit que 1.

(*cf.* feuille II.3, Similitudes, question 2.c).

Complément

De plus, nous avons constaté sur un exemple que l'ensemble limite ne semblait pas dépendre de l'ensemble de départ E_0 (question 3 de la feuille II.1, et bilan). Ceci est une propriété surprenante que nous incorporons à l'énoncé. Voici donc notre conjecture :

CONJECTURE *On se donne*

- un entier p ;
- des similitudes **contractantes** du plan $T_1, \dots, T_p$;
- une partie **fermée bornée** K_0 du plan.

On définit la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties fermées bornées du plan par la relation de récurrence

$$K_{n+1} = T_1(K_n) \cup \dots \cup T_p(K_n).$$

Alors la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour la distance de Hausdorff : autrement dit, il existe un fermé borné K_∞ du plan tel que

$$d_H(K_n, K_\infty) \rightarrow 0$$

quand n tend vers $+\infty$.

De plus, l'ensemble-limite K_∞ ne dépend pas de l'ensemble de départ K_0 , mais seulement des applications $T_1, \dots, T_p$. En fait, l'ensemble K_∞ est l'unique fermé borné (non vide) du plan qui est invariant par le procédé.

Rappel :

1. K_∞ est invariant par le procédé : cela signifie qu'on a l'équation

$$K_\infty = T_1(K_\infty) \cup \dots \cup T_p(K_\infty).$$

2. La convergence pour la distance de Hausdorff signifie : pour tout ϵ , il existe un rang n_0 à partir duquel K_n est inclus dans l' ϵ -voisinage de K_∞ et K_∞ est inclus dans l' ϵ -voisinage de K_n .

Plan de l'étude

1. On va prouver une version faible de la conjecture : on s'autorise à tricher un peu, plus précisément, on s'autorise à changer l'ensemble de départ K_0 et à le remplacer par un ensemble "plus gros".
2. Le problème est analogue à certains problèmes classiques d'étude d'une suite de nombres définie par récurrence.
3. En suivant l'analogie vue au point précédent, on montre que "le procédé est contractant", et on en déduit la preuve de la conjecture (qui se transforme illico en théorème).

Convergence des IFS quand K_0 est “assez gros”

Motivation Le premier exemple d'ensemble fractal qu'on a vu était le triangle de Sierpinski. Rappelons que pour cet exemple, la suite (K_n) est obtenue en enlevant successivement des carrés de plus en plus petits ; notamment, cette suite est décroissante, au sens où on a

$$K_{n+1} \subset K_n$$

pour tout n . Cette propriété permet de définir facilement l'ensemble K_∞ :

$$K_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

En général, la suite de parties du plan n'est pas décroissante ; par exemple, elle est croissante pour l'antenne de télé (on rajoute des segments), et elle n'est ni croissante ni décroissante pour la courbe de Von Koch (on enlève des segments et on les remplace par d'autres segments).

On va généraliser la construction du triangle de Sierpinski, et prouver une version faible de la conjecture. Comme dans l'énoncé de la conjecture, on se donne des similitudes contractantes $T_1, \dots, T_p$; par contre, on ne fixe pas un ensemble K_0 , mais *on se donne le droit de le choisir*. L'idée est que si on choisit K_0 “assez gros”, la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ va être décroissante, et on pourra définir l'ensemble-limite comme une intersection infinie, c'est-à-dire par la même formule que pour le triangle de Sierpinski.

Énoncé précis

CONJECTURE FAIBLE *On se donne*

- un entier p ;
- des similitudes contractantes du plan $T_1, \dots, T_p$.

Alors **il existe** K'_0 une partie fermée bornée du plan, **vérifiant la propriété suivante** :
On définit la suite $(K'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties du plan par la relation de récurrence

$$K'_{n+1} = T_1(K'_n) \cup \dots \cup T_p(K'_n).$$

Alors

1. la suite $(K'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **est décroissante** ;
2. si on pose

$$K'_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K'_n,$$

alors l'ensemble K'_∞ est une partie fermée bornée du plan, non vide, invariante par le procédé :

$$K'_\infty = T_1(K'_\infty) \cup \dots \cup T_p(K'_\infty).$$

Remarquons que la conclusion est plus faible que dans la conjecture initiale : on ne va pas prouver la convergence pour la distance de Hausdorff. Le principal intérêt de cet énoncé est de donner l'existence de K'_∞ , fermé borné invariant par le procédé.

Preuve de la conjecture faible

Question 1. Choix d'un disque

On va montrer le lemme suivant.

LEMME *Soit T une similitude contractante. Alors il existe un réel positif r_0 tel que tout disque D , centré en $(0,0)$, et de rayon r plus grand que r_0 , vérifie*

$$T(D) \subset D.$$

- a. Prouver le lemme.
- b. On se place dans le cas d'une unique similitude ($p = 1$). Montrer qu'on peut choisir K'_0 comme étant le disque D donné par le lemme, et qu'on obtient toutes les propriétés demandées par la "conjecture faible."

Question 2. Définition de K'_0

On se place dans le cas général (le nombre p de similitudes est quelconque). À l'aide du lemme, trouver un ensemble K'_0 pour lequel K'_1 est inclus dans K'_0 . Montrer que dans ce cas, la suite $(K'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Question 3. Invariance

Pour l'ensemble K'_0 trouvé à la question précédente, on définit l'ensemble K'_∞ comme dans l'énoncé de la conjecture faible. Montrer que K'_∞ est invariant par le procédé.

Question 4. Conclusion

Que reste-t-il à montrer ?...

Convergence des IFS : analogie avec les suites réelles

Rappelons qu'on est en train d'essayer de prouver la conjecture (voir la feuille IV.1). Il s'agit d'un énoncé difficile, donc on a le droit de mettre longtemps à écrire la preuve. Prenons notre temps...

On va commencer par une analogie. Vous avez déjà rencontré des problèmes de convergence d'une suite (de nombres réels) définie par une relation de récurrence : il y en a plein les annales du BAC ! Pour se rappeler comment ça marche, on va commencer par résoudre l'exercice suivant.

Convergence d'une suite réelle définie par une relation de récurrence

On considère la fonction

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto \frac{1}{2} \exp(-x). \end{aligned}$$

On se donne un réel x_0 , et on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

On veut montrer que cette suite converge.

a. Point fixe Montrer que la fonction f admet un point fixe x_∞ , c'est-à-dire un réel vérifiant

$$f(x_\infty) = x_\infty.$$

b. Contraction Montrer que l'application f est *contractante* : pour tous x, y , la distance entre les images de x et y par f est plus petite que la moitié de la distance entre x et y :

$$d_{\mathbb{R}}(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} d_{\mathbb{R}}(x, y)$$

($d_{\mathbb{R}}$ désigne la distance dans $\mathbb{R}$, $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$).

c. Convergence Évaluer la distance entre x_n et x_∞ en fonction de la distance entre x_0 et x_∞ (utiliser la question précédente). Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le point fixe x_∞ .

En quoi notre problème de convergence des IFS et ce problème de convergence d'une suite réelle sont-ils analogues ? Donner les analogues, pour les IFS, de...

- la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$;
- la fonction f (attention, réfléchissez !) ;
- les nombres réels ;
- x_∞ ;
- un point fixe pour l'application f ;
- la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers x_∞ .

Les *énoncés* des deux problèmes sont analogues ; il se trouve qu'on va pouvoir aussi leur trouver des *solutions* analogues.

Convergence des IFS : preuve

Découpage de la preuve On cherche à copier la démarche de l'exercice sur les suites de nombres. Comme dans l'exercice, on va découper la preuve en trois étapes :

1. on va montrer qu'il existe un fermé borné du plan qui est invariant par le procédé (c'est l'analogue du "point fixe" de l'exercice) ;
2. on va montrer que "le procédé est contractant pour la distance de hausdorff" ;
3. on en déduira que la suite de fermés bornés $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le fermé borné invariant.

La première étape est difficile, mais on a déjà résolu le problème. La deuxième étape va nous demander encore un peu de travail. Et la dernière étape marchera comme dans l'exercice sur les suites réelles.

Preuve de la conjecture

Question 1. Existence d'un fermé borné invariant

Si vous avez bien suivi l'histoire, vous savez qu'on a déjà trouvé un fermé borné invariant par le procédé (où ça ?...).

Question 2. Le procédé est contractant pour la distance de hausdorff

On veut prouver que le procédé est contractant. On va commencer par le cas le plus simple, celui où on itère une seule transformation (lemme 1 ; ça permet de s'échauffer, et ça sert pour le cas général). Ensuite, on regarde comment la distance de Hausdorff se comporte du point de vue de la réunion des ensembles (lemme 2). Finalement, on prouve la contraction (proposition 3) ; pour simplifier, on considère un procédé avec seulement deux applications T_1 et T_2 (la preuve marcherait pareil avec plus d'applications, c'est juste plus embêtant à écrire).

a. Traduction Écrire précisément ce qu'on entend par "le procédé est contractant pour la distance de Hausdorff". **Aide** : utiliser l'analogie avec les suites réelles, voir la question 2 de l'exercice.

b. Une seule application Montrer le lemme 1, en complétant l'énoncé (dire qui est c_1).

Lemme 1 Soit T_1 une similitude contractante du plan, et $c_1 \dots \dots$. Alors, pour toutes parties fermées bornées du plan K, K' , on a

$$d_H(T_1(K), T_1(K')) = c_1 \cdot d_H(K, K').$$

Aide : comment caractériser le fait que $d_H(A, B) \leq d$ à l'aide des d -voisinages ?

c. Réunion et distance de hausdorff Montrer le lemme suivant :

Lemme 2 Soient A, A', B, B' quatre parties fermées bornées du plan. Alors on a

$$d_H(A \cup B, A' \cup B') \leq \max(d_H(A, A'), d_H(B, B')).$$

d. Fin de la preuve de la contraction Montrer que le procédé est contractant, en complétant l'énoncé :

Proposition 3 Soit T_1, T_2 deux similitudes contractantes du plan, et $c \dots \dots$ Alors, pour toutes parties fermées bornées du plan K, K' , on a

$$d_H(T_1(K) \cup T_2(K), T_1(K') \cup T_2(K')) \leq c.d_H(K, K').$$

Question 3. Convergence

Écrire la fin de la preuve de la conjecture. **Aide :** il s'agit de traduire la preuve de l'exercice sur les suites réelles : maintenant qu'on sait qu'il existe un fermé borné invariant, et que le procédé est contractant, ça devrait marcher exactement de la même manière.

Preuve de la convergence des IFS (corrigé)

Pour toute la preuve, on se donne un entier p , et des similitudes contractantes $T_1, \dots, T_p$.

Existence d'un fermé borné invariant (conjecture faible)

Le lemme

LEMME Soit T une similitude contractante. Alors il existe un réel positif r_0 tel que tout disque D , centré en $(0,0)$, et de rayon r plus grand que r_0 , vérifie

$$T(D) \subset D.$$

Démonstration du lemme On sait qu'il existe deux nombres complexes a et b tels que, en notation complexe, la similitude T s'écrit $z \mapsto az + b$. De plus, le rapport de la similitude est donné par le module de a ; le fait que T soit contractante s'écrit donc $|a| < 1$ (cf. exercice sur les similitudes, feuille II.3, question 2.c).

On pose

$$r_0 = \frac{|b|}{1 - |a|}.$$

Il s'agit bien d'un nombre réel strictement positif, puisque $|a| < 1$. Soit maintenant $r \geq r_0$, et D le disque de rayon r centré en $(0,0)$. Il s'agit de montrer que

$$T(D) \subset D.$$

Soit $z' \in T(D)$, autrement dit tel que $z' = T(z)$ pour un nombre complexe z de D . On a $|z| \leq r$. Il s'agit de voir que $z' \in D$, c'est-à-dire que $|T(z)| \leq r$. Un petit calcul (...) montre que c'est le cas. $\square$

Commentaire La valeur de r_0 a bien sûr été choisie justement pour que le "petit calcul" marche. Quand on cherche la démonstration, au brouillon, on laisse un blanc au moment où il faut définir r_0 . On effectue le calcul, et c'est seulement à la fin du calcul qu'on comprend comment choisir r_0 pour que ça marche.

Le fermé borné invariant

On reprend nos applications $T_1, \dots, T_p$. On applique le lemme pour chacune de ces applications : pour chaque $i = 1, \dots, p$, on obtient ainsi un nombre réel strictement positif qu'on note $r_0(i)$. On appelle alors r le plus grand de ces nombres, et on note encore D le disque de rayon r centré en $(0,0)$.

Pour chaque $i = 1, \dots, p$, on a $r \geq r_0(i)$, et donc, d'après le lemme, $T_i(D) \subset D$. On en déduit

$$T_1(D) \cup \dots \cup T_p(D) \subset D.$$

Posons alors $K'_0 = D$, et définissons la suite $(K'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $K'_{n+1} = T_1(K'_n) \cup \dots \cup T_p(K'_n)$.

On montre facilement, par récurrence, que cette suite est décroissante : $K'_{n+1} \subset K'_n$ pour tout $n \geq 0$. Enfin, on définit

$$K'_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K'_n.$$

Il reste à voir que c'est un ensemble invariant par le procédé, qui est fermé borné, et qui n'est pas vide.

Invariance Montrons que cet ensemble est invariant.⁶

$$\begin{aligned} T_1(K'_\infty) \cup \dots \cup T_p(K'_\infty) &\stackrel{(1)}{=} T_1\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K'_n\right) \cup \dots \cup T_p\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K'_n\right) \\ &\stackrel{(2)}{=} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_1(K'_n)\right) \cup \dots \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_p(K'_n)\right) \\ &\stackrel{(3)}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (T_1(K'_n) \cup \dots \cup T_p(K'_n)) \\ &\stackrel{(4)}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K'_{n+1} \\ &\stackrel{(5)}{=} \bigcap_{n \geq 1} K'_n \\ &\stackrel{(6)}{=} \bigcap_{n \geq 0} K'_n \\ &\stackrel{(7)}{=} K'_\infty. \end{aligned}$$

Justifications ligne par ligne :

1. définition de K'_∞ ;
2. “l'image de l'intersection est égale à l'intersection des images”, vrai car T_i est injective (cf. exercice de théorie des ensembles, feuille I.3, question 3.c) ;
3. propriété démontré dans le même exercice, question 4, vraie car chacune des suites $(T_i(K'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
4. définition de K'_{n+1} ;
5. changement d'indice ;
6. vrai car la suite est décroissante ;
7. définition de K'_∞ .

Compacité L'ensemble K'_∞ est clairement borné, puisqu'il est inclus dans K_0 qui est un disque. D'autre part, il est défini comme une intersection d'ensembles ; puisqu'une intersection de fermés est fermée, pour montrer que K'_∞ est fermé, il suffit donc de montrer que chacun des ensembles K'_n est fermé.

On montre ceci par récurrence. L'ensemble K'_0 est fermé (c'est un disque fermé).

Supposons que K'_n est fermé, il s'agit de montrer que l'ensemble $K'_{n+1} = T_1(K'_n) \cup \dots \cup T_p(K'_n)$ est encore fermé. Montrons d'abord que chaque ensemble $T_i(K'_n)$ est encore fermé. L'application T_i est une similitude, elle est donc bijective, et son inverse est encore une similitude ; en particulier, son inverse est continue. On écrit alors

$$T_i(K'_n) = (T_i^{-1})^{-1}(K'_n) \quad (\text{vous lisez bien, il y a deux fois l'exposant “-1” !}).$$

⁶La preuve est tout à fait similaire à la preuve de l'invariance du triangle de Sierpinski, cf. feuille II.0, question a.

Autrement dit, $T_i(K'_n)$ est aussi l'image réciproque de K'_n par l'application T_i^{-1} . Comme cette application est continue, et que K'_n est fermé par hypothèse de récurrence, on en déduit que l'ensemble $T_i(K'_n)$ est bien fermé (comme image réciproque d'un fermé par une application continue). Finalement, l'ensemble K'_{n+1} est fermé comme réunion *finie* d'ensembles fermés.

Exercice sur les suites réelles

a. Point fixe Chercher un point fixe de f revient à chercher un zéro de la fonction g définie par la formule $g(x) = f(x) - x$. On a $g(0) = 1/2$. D'autre part, la fonction g tend vers $-\infty$ en $+\infty$, elle prend en particulier des valeurs négatives. Le théorème des valeurs intermédiaires nous fournit alors un zéro de g .

b. Contraction On voit facilement que $|f'(t)| \leq 1/2$ pour tout $t \geq 0$. On obtient l'inégalité de contraction en intégrant : pour tous $x, y \geq 0$,

$$d_{\mathbb{R}}(f(x), f(y)) = |f(y) - f(x)| \quad (1)$$

$$= \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \quad (2)$$

$$\leq \int_x^y |f'(t)| dt \quad (3)$$

$$\leq \int_x^y 1/2 dt = \frac{1}{2} d_{\mathbb{R}}(x, y). \quad (4)$$

(1 : définition de la distance dans $\mathbb{R}$; 2 : lien entre intégrale et dérivée ; 3 : propriété fondamentale de l'intégrale (une version de l'inégalité triangulaire) ; 4 : inégalité de départ.

c. Convergence On utilise le fait que $f(x_{\infty}) = x_{\infty}$:

$$d_{\mathbb{R}}(x_n, x_{\infty}) = d_{\mathbb{R}}(f(x_{n-1}), f(x_{\infty})) \quad (5)$$

$$\leq \frac{1}{2} d_{\mathbb{R}}(x_{n-1}, x_{\infty}) \quad (6)$$

$$= d_{\mathbb{R}}(f(x_{n-2}), f(x_{\infty})) \quad (7)$$

$$\leq \frac{1}{2^2} d_{\mathbb{R}}(x_{n-2}, x_{\infty}) \quad (8)$$

$$= \dots \quad (9)$$

$$\leq \frac{1}{2^n} d_{\mathbb{R}}(x_0, x_{\infty}). \quad (10)$$

Si on veut être plus précis, on remplace les pointillés par une preuve par récurrence.

Maintenant, la partie droite de l'inégalité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers x_{∞} .

Tableau des analogies

Suites réelles	IFS
nombre réels	parties fermées bornées du plan
la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$	la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$
la fonction f	le procédé $K \mapsto T_1(K) \cup \dots \cup T_p(K)$
le point fixe x_{∞}	un fermé borné invariant par le procédé
convergence dans $\mathbb{R}$	convergence pour la distance de Hausdorff

Preuve de la convergence

Question 1. Fermé borné invariant

La conjecture faible montre en particulier l'existence d'un fermé borné invariant par le procédé, noté K'_∞ .

Question 2. Contraction

Rappelons qu'on se limite au cas de deux applications ($p = 2$).

a. Traduction Ceci signifie qu'il existe une constante c , $0 < c < 1$, telle que

$$d_H(T_1(K) \cup T_2(K), T_1(K') \cup T_2(K')) \leq c \cdot d_H(K, K')$$

pour tous fermés bornés K, K' du plan.

b. Une seule application

Nous allons utiliser les remarques suivantes.

- L'inégalité *stricte* $d_H(A, B) < d$ équivaut à dire que A est inclus dans $V_d(B)$, d -voisinage de B , et B est inclus dans $V_d(A)$;
- pour l'inégalité *large* $d_H(A, B) \leq d$, c'est un peu plus compliqué : cela équivaut à écrire que l'inégalité stricte $d_H(A, B) < d + \epsilon$ est vérifiée pour tout $\epsilon > 0$.

On note c_1 la valeur du rapport de la similitude T_1 . Rappelons que l'application T_1 contracte les distance d'un facteur c_1 : pour tous points du plan x, x' , on a $d_{\mathbb{R}}(T(x), T(x')) = c_1 \cdot d_{\mathbb{R}}(x, x')$.

Soient K et K' deux fermés bornés du plan. On veut montrer

$$d_H(T_1(K), T_1(K')) = c_1 \cdot d_H(K, K').$$

Posons $d = c_1 \cdot d_H(K, K')$, et montrons d'abord l'inégalité $d_H(T_1(K), T_1(K')) \leq d$.

D'après la définition de la distance de Hausdorff (voir la remarque ci-dessus), on doit montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $T_1(K) \subset V_{d+\epsilon}(T_1(K'))$ et $T_1(K') \subset V_{d+\epsilon}(T_1(K))$.

Montrons la première inclusion. Par définition de d , on a

$$d_H(K, K') < \frac{d + \epsilon}{c_1}$$

et donc en particulier

$$K \subset V_{\frac{d+\epsilon}{c_1}}(K').$$

On prend y dans $T(K)$, il s'écrit donc $y = T(x)$ avec $x \in K$. D'après l'inclusion ci-dessus, il existe x' dans K' tel que $d_{\mathbb{R}}(x, x') < \frac{d+\epsilon}{c_1}$. On pose $y' = T(x')$, on a alors

$$d_{\mathbb{R}}(y, y') = d_{\mathbb{R}}(T(x), T(x')) = c_1 \cdot d_{\mathbb{R}}(x, x') < c_1 \cdot \frac{d + \epsilon}{c_1} = d + \epsilon.$$

Étant donné $y \in T(K)$, on a trouvé $y' \in T(K')$ tel que $d_{\mathbb{R}}(y, y') < d + \epsilon$, ce qui prouve bien que $T_1(K) \subset V_{d+\epsilon}(T_1(K'))$.

L'autre inclusion, $T_1(K') \subset V_{d+\epsilon}(T_1(K))$, se montre de façon complètement symétrique. On a donc obtenu l'inégalité $d_H(T_1(K), T_1(K')) \leq c_1 \cdot d_H(K, K')$.

Montrons l'inégalité inverse. Pour ça, on peut poser $T_2 = T_1^{-1}$; cette application est une similitude, de rapport c_1^{-1} . En **appliquant à T_2 et aux ensembles $T_1(K)$ et $T_1(K')$ l'inégalité qu'on vient de montrer**, on obtient

$$d_H(T_2(T_1(K)), T_2(T_1(K'))) \leq c_1^{-1} \cdot d_H(T_1(K), T_1(K')),$$

autrement dit

$$c_1 \cdot d_H(K, K') \leq d_H(T_1(K), T_1(K'))$$

qui est bien l'inégalité inverse. Ceci achève de montrer l'égalité voulue.

c. Réunion et distance de hausdorff On pose $d = \max(d_H(A, A'), d_H(B, B'))$, il s'agit de montrer que $d_H(A \cup B, A' \cup B') \leq d$, ce qu'on traduit encore en : pour tout $\epsilon > 0$, $A \cup B \subset V_{d+\epsilon}(A' \cup B')$ et $A' \cup B' \subset V_{d+\epsilon}(A \cup B)$.

Les deux inclusions se montrent de la même manière. Pour la première, on utilise le fait que $d_H(A, A') < d + \epsilon$, ce qui donne $A \subset V_{d+\epsilon}(A')$, et la propriété analogue pour B et B' . Les détails sont laissés au lecteur...

d. Fin de la preuve de la contraction On note c_1, c_2 les rapports de contraction des similitudes T_1, T_2 . En appliquant le lemme 2, on a

$$d_H(T_1(K) \cup T_2(K), T_1(K') \cup T_2(K')) \leq \max(d_H(T_1(K), T_1(K')), d_H(T_2(K), T_2(K'))).$$

D'autre part, d'après le lemme 1, on a $d_H(T_1(K), T_1(K')) = c_1 \cdot d_H(K, K')$, et de même $d_H(T_2(K), T_2(K')) = c_2 \cdot d_H(K, K')$. On en déduit

$$d_H(T_1(K) \cup T_2(K), T_1(K') \cup T_2(K')) \leq c \cdot d_H(K, K')$$

où c est le plus grand des deux rapports c_1 et c_2 .

Question 3. Convergence

On recopie la preuve dans le cas des suites réelles, en substituant chaque terme par son analogue dans la liste des analogies de la feuille IV.3.

Et c'est fini!!

THÉORÈME *On se donne*

- *un entier p ;*
- *des similitudes contractantes du plan $T_1, \dots, T_p$;*
- *une partie fermée bornée K_0 du plan.*

On définit la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties fermées bornées du plan par la relation de récurrence

$$K_{n+1} = T_1(K_n) \cup \dots \cup T_p(K_n).$$

Alors la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour la distance de Hausdorff : autrement dit, il existe un fermé borné K_∞ du plan tel que

$$d_H(K_n, K_\infty) \rightarrow 0$$

quand n tend vers $+\infty$.

De plus, l'ensemble-limite K_∞ ne dépend pas de l'ensemble de départ K_0 , mais seulement des applications $T_1, \dots, T_p$. En fait, l'ensemble K_∞ est l'unique fermé borné (non vide) du plan qui est invariant par le procédé.

Introduction au théorème du point fixe contractant

Le principe devient un théorème Pour trouver une preuve de la convergence des IFS, nous avons utilisé une analogie avec un problème de convergence des suites de nombres. Dans les deux cas, le point-clé consiste à montrer que les procédés sont contractants.

Ce principe, “la contraction entraîne la convergence”, peut être utilisé dans beaucoup d’autres cas. Du coup, les mathématiciens en ont fait un théorème, le *théorème du point fixe contractant*. Ce théorème énonce le principe dans le cadre le plus général possible. Comme c’est un énoncé très général, il est aussi très abstrait, et donc difficile : pour l’utiliser, il faut notamment avoir compris ce qu’est un *espace métrique complet*. Le gros avantage, c’est qu’une fois qu’on a fait l’effort de le comprendre, on a un outil qui s’applique à des situations très variées, sans qu’on ait besoin de refaire à chaque fois la démonstration : **le même théorème** va s’appliquer aux suites de nombres **et** aux suites de fermés bornés du plan, mais aussi à d’autres cadres (suites de fonctions, par exemple).

Le théorème du point fixe contractant

Voici l’énoncé du théorème ; les termes sont expliqués plus bas.

THÉORÈME Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $T : X \rightarrow X$ une application contractante. Alors il existe un point z de X , et un seul, qui est un point fixe de T . Et surtout, pour tout point x de X , lorsqu’on définit par récurrence la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = T(x_n), \end{cases}$$

cette suite converge vers le point fixe z .

- Le fait que l’application T est *contractante* signifie qu’il existe une constante $0 < k < 1$ telle que pour tous $x, y \in X$,

$$d(T(x), T(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

- Le fait que z soit un *point fixe* de T signifie que $T(z) = z$.
- L’expression “ (X, d) est un espace métrique” signifie qu’on a une manière de “mesurer la distance entre deux points de X ” : pour tous points x, y de X , on a un nombre noté $d(x, y)$; de plus, cette “distance” vérifie trois propriétés (ou *axiomes*) essentielles de la distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$:

1. deux points à distance nulle sont égaux ;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. l’inégalité triangulaire.

En quelque sorte, on peut imaginer que X est le plan euclidien, mais qu’on doit oublier toutes les autres propriétés de la distance pour ne retenir que ces trois-là (et celles qui en découlent) ; il se trouve que ces trois petits axiomes sont suffisants pour récupérer une grande partie de ce qu’on savait faire dans $\mathbb{R}^n$ (voir le cours de topologie de Licence...).

Il sont clairement vérifiés pour la distance dans $\mathbb{R}$ ($d(x, y) = |x - y|$). On a montré qu’ils étaient aussi vérifiés quand X est l’espace des fermés bornés du plan, et d est la distance de Hausdorff (voir la feuille III, unicité de la limite, et inégalité triangulaire).

- Un espace métrique est *complet* si toute suite de Cauchy (pour la distance d) est convergente. Rappelons qu’une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \forall p, q \text{ assez grands, on a } d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

En gros, le fait d’être complet dit que “si une suite a ses termes qui se rapprochent de plus en plus les uns des autres, alors elle converge”.⁷

Cette hypothèse fournit un moyen de montrer qu’une suite converge, et elle est essentielle pour obtenir l’**existence** du point fixe. Il s’agit encore d’une propriété de la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, moins naturelle, qui a été extraite et promue au rang d’axiome.

Rappelez-vous : dans l’exercice sur les suites de nombres, on a montré l’existence du point fixe en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires. Ce théorème est spécifique à $\mathbb{R}$. Pour les IFS, il a fallu inventer un argument complètement différent (on a remarqué que quand K_0 était très gros, on pouvait définir le fermé borné invariant comme l’intersection des K_n). En fait, quand on connaît le théorème du point fixe, on peut supprimer ces deux arguments en montrant que l’espace métrique (X, d) est complet.

Ce théorème sera démontré dans le cours de Licence (vous pouvez essayer tout seul, la preuve n’est pas difficile) ; il sera appliqué à la théorie des équations différentielles. Dans l’exercice qui suit, on va l’utiliser sur un exemple.

Équations différentielles et procédé contractant

On considère des fonctions continues de $[-1/2, 1/2]$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction f comme ça, on appelle $T(f)$ la primitive de f qui prend la valeur 1 au point 0. C’est encore une fonction continue définie sur $[-1/2, 1/2]$.

Attention, $T(f)$ est une fonction, on va donc écrire $T(f)(x)$ pour la valeur de cette fonction au point x ; $T(f)(x)$ est un nombre réel (par exemple, la condition sur la valeur en 0 s’écrit $T(f)(0) = 1$). Par contre, T n’est pas une fonction, c’est un objet plus compliqué, qui transforme une fonction en une autre fonction ; de tels objets sont parfois appelés *opérateurs*. Ainsi, nous avons des objets mathématiques sur trois niveaux différents, qu’il faut bien distinguer :

- T est un opérateur (il transforme les fonctions en d’autres fonctions) ;
- f et $T(f)$ sont des fonctions (elles transforment les nombres en d’autres nombres) ;
- x , $f(x)$ et $T(f)(x)$ sont des nombres.

Nous allons jouer à **itérer l’opérateur** T . Autrement dit, on part d’une certaine fonction f , et on définit par récurrence une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$\begin{cases} f_0 = f \\ f_{n+1} = T(f_n). \end{cases}$$

La question qu’on se pose est : *comment se comporte cette suite de fonctions ?*

Question 1. Exemples

- Donner une formule définissant la fonction $T(f)$ à partir de la fonction f .
- Essayer en partant de la fonction nulle $f = 0$. Calculer les premières fonctions f_1 , f_2 , etc.. Trouver (et montrer) une formule pour f_n . Vers quelle fonction f_∞ converge la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Démontrer la convergence. A-t-on une convergence uniforme ?
- (optionnelle) Que se passe-t-il si on part de la fonction sinus ?

⁷D’après J.-P. Kahane, conférence à l’UTLS, *Nécessité et pièges des définitions mathématiques*, disponible sur le web, www.canalu.fr.

Question 2. Preuve générale

On voudrait montrer que *quelle que soit la fonction f de départ, la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même fonction f_∞* . On va utiliser le théorème du point fixe contractant. Pour ça, il faut mettre une distance sur l'ensemble des fonctions qu'on considère.

On note maintenant X l'ensemble des fonctions considérées (X est donc l'ensemble des fonctions continues de $[-1/2, 1/2]$ dans $\mathbb{R}$). Sur cet ensemble, on note d_X la distance issue de la “norme sup” :

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(t), g(t)|, t \in [-1/2, 1/2]\}.$$

Si cette formule ne vous dit rien qui vaille, testez-la sur des exemples : quelle distance sépare la fonction $t \mapsto t$ de la fonction $t \mapsto t^2$ (rappelez-vous que toutes les fonctions sont définies sur $[-1/2, 1/2]$) ? Quelle distance sépare la fonction sinus de la fonction $t \mapsto 1/2$?

- a. (optionnelle) Montrer que (X, d) est un espace métrique complet.
- b. Montrer que l'opérateur T est contractant pour la distance d_∞ . **Aide** : le plus difficile, c'est d'écrire correctement ce que cela signifie, sans se tromper d'objets.
- c. Que dit alors le théorème du point fixe ?
- d. Au fait, quelle est la fonction qui est un point fixe de T ? **Aide** : vous l'avez trouvé dans la question 1.

Question 3. Lien avec les équations différentielles

a. Soit f une fonction de classe C^1 , toujours définie de $[-1/2, 1/2]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est un point fixe de l'opérateur T si et seulement si elle est solution de l'équation différentielle

$$f' = f$$

avec la condition initiale $f(0) = 1$.

- b. Que peut-on en déduire concernant les solutions de l'équation différentielle $f' = f$?

Remarque Dans cet exemple d'équation différentielle, on n'avait pas vraiment besoin du théorème du point fixe : en effet, tout le monde connaît la solution $f = \exp$. On utilise seulement la partie “unicité” du théorème, alors que c'est surtout la partie “existence” qui est intéressante. Mais il y a beaucoup d'équations différentielles dont on ne connaît pas de solution explicite (donnée par une formule) ; c'est le cas de l'équation $f' = 2 \cdot \sin(f)$ que nous allons considérer maintenant.

Question 4. Autre exemple

On considère l'équation différentielle

$$f' = 2 \cdot \sin(f)$$

et on cherche les solutions, définies sur $[-1/4, 1/4]$, telles que $f(0) = 1$.

Montrer qu'il existe une unique solution. **Aide** : procéder comme dans les questions précédentes : cette-fois, c'est à vous de définir un opérateur T associé à cette équation, puis de vérifier qu'il est contractant.

L'Hotel de Hilbert : recherche

L'histoire suivante a été proposée par David Hilbert pour illustrer les propriétés surprenantes des ensembles infinis. On va s'intéresser notamment à l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers positifs, et à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Nous proposons cette histoire sous forme d'un exercice en deux temps : d'abord une réflexion informelle sur cet hotel un peu particulier ; ensuite le contenu mathématique de l'histoire.

Question 1. L'Hotel de Hilbert

L'Hotel de Hilbert est un hotel comme les autres, à un détail près : il possède une infinité de chambres. Comme dans tous les hotels, ces chambres sont numérotées : il y a la chambre numéro 1, la chambre numéro 2, la chambre numéro 3, *etc.*

Pour être plus précis, il faut signaler une autre particularité de cet hotel : chaque client doit signer une clause spéciale, selon laquelle il s'engage à accepter de changer de chambre quand la direction de l'hotel le lui demande. Pour simplifier les demandes de changement de chambre, la réception est équipée d'un micro qui lui permet de communiquer avec toutes les chambres en même temps.

a. Poussez vous, j'arrive ! C'est la pleine saison, et toutes les chambres sont occupées. Un nouveau voyageur se présente à la réception et demande s'il y a de la place. Comment feriez-vous pour lui trouver une chambre ?

b. Poussez-vous, on arrive !! Toutes les chambres sont encore occupées, et cette fois-ci, c'est un car entier de voyageurs qui arrive inopinément. Bien sûr, ce car transporte lui aussi une infinité de voyageurs (le voyageur numéro 1, le voyageur numéro 2, *etc.*). Comment faites-vous pour loger tout le monde, les anciens et les nouveaux ? (quel numéro de chambre donnez-vous à chacun ?)

c. Plus on est de fous... Un autre jour, l'hotel est complètement vide. Quelques cars de voyageurs (une infinité) arrivent simultanément : le car numéro 1, le car numéro 2, le car numéro 3, *etc.* Chaque car est du même modèle que dans l'épisode précédent. Il y a donc :

- le voyageur numéro 1 du car numéro 1, le voyageur numéro 2 du car numéro 1, le voyageur numéro 3 du car numéro 1, *etc.*
- le voyageur numéro 1 du car numéro 2, le voyageur numéro 2 du car numéro 2, le voyageur numéro 3 du car numéro 2, *etc.*
- le voyageur numéro 1 du car numéro 3, le voyageur numéro 2 du car numéro 3, le voyageur numéro 3 du car numéro 3, *etc.*
- *etc.*

L'Hotel doit les accepter tous ! Comment faire ?

d. ...plus on rit ! Dans ce dernier épisode, il arrive un seul car. Il contient encore une infinité de voyageur, mais il s'agit d'un modèle plus moderne que ceux des épisodes précédents : cette fois-ci, le car contient autant de voyageur qu'il y a de nombres réels strictement compris entre 0 et 1 (il y a donc notamment Monsieur $1/2$, Monsieur $1/3$, mais aussi Monsieur $1/\pi$, et bien d'autres encore.

Le gérant de l'hotel affirme qu'il ne pourra jamais loger tout le monde. Sauriez-vous convaincre les voyageurs qu'ils doivent chercher un hotel plus spacieux ?

Question 2. Traduction mathématique

Dans chaque épisode de l'histoire de l'Hotel de Hilbert, on a un ensemble de voyageurs (notons-le $\mathcal{V}$) et un ensemble de chambres (notons-le $\mathcal{C}$; mais puisque les chambres sont numérotées, on peut aussi identifier l'ensemble $\mathcal{C}$ avec l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$). Et le problème consiste à attribuer une chambre à chaque voyageur, c'est-à-dire à **construire une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{C}$** .

a. Implicitement, on exige que deux voyageurs ne se retrouvent pas dans la même chambre! *Comment se traduit mathématiquement cette exigence?*

b. En réalité, la plupart du temps, dans la solution trouvée, les voyageurs vont occuper toutes les chambres de l'hotel. *Comment se traduit mathématiquement cette propriété?*

Vous allez maintenant trouver un contenu mathématique à chacune des questions de l'histoire racontée dans la question 1. Pour vous aider, traduisons ensemble la question 1.a. Comme on l'a fait remarquer plus haut, l'ensemble des chambres peut être identifié avec l'ensemble $\mathbb{N}^*$. Il reste à définir un ensemble qui représente les voyageurs. Dans la question **a**,

- toutes les chambres sont occupées : on peut encore représenter les voyageurs qui occupent déjà une chambre par l'ensemble $\mathbb{N}^*$;
- il y a un voyageur supplémentaire : une possibilité consiste à lui attribuer le numéro 0.

Du coup, les voyageurs sont représentés par l'ensemble $\mathbb{N}^* \cup \{0\} = \mathbb{N}$.⁸ Autrement dit, la réponse à la question 1.a. peut se traduire comme suit : *Il existe une injection (et même une bijection) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.*

c. Traduire les questions 1.b, 1.c. et 1.d en énoncés mathématiques. Dans la question 3, on prouvera ces énoncés (ou des énoncés similaires).

Question 3. Réécriture formelle

a. Poussez vous, j'arrive! Montrer qu'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (décrire cette injection par une formule).

c. Poussez vous, on arrive!!

c. Plus on est de fous... De même, démontrer les énoncés mathématiques obtenus comme traductions des questions 1.c et 1.d.

d. ...plus on rit! Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre $[0, 1]$ et $\mathbb{N}^*$. **Aide :** supposons qu'une telle bijection existe : alors **il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui prend comme valeurs tous les nombres réels entre 0 et 1** (pourquoi?). Autrement dit, il nous suffit de prouver l'énoncé suivant :

THÉORÈME *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres dans $[0, 1]$. Alors il existe au moins un élément x de $[0, 1]$ qui n'est égal à aucun élément de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.*

C'est la construction de l'élément x qui est délicate. On utilise l'écriture décimale, et une astuce très utile, appelée "procédé diagonal de Cantor"...

⁸On aurait aussi pu choisir n'importe quel symbole pour représenter le nouveau voyageur, par exemple $\&$, l'ensemble des voyageurs est alors $\mathbb{N}^* \cup \{\&\}$.

Hôtel de Hilbert : bilan

Le but de cette feuille est d'entrevoir quelques propriétés peu intuitive des ensembles infinis, puis de comprendre qu'il existe "des ensembles infinis plus ou moins gros".

A priori, parler du *nombre d'éléments* d'un ensemble infini peut sembler absurde (un ensemble infini possède une infinité d'éléments, et c'est tout ce qu'il y a à dire!). Pourtant, on peut remarquer que deux ensembles finis E et F ont même nombre d'éléments si et seulement si il existe une bijection entre E et F . On peut alors prendre la même définition pour les ensembles infinis : on dira que deux ensembles infinis E et F ont même *nombre d'éléments* s'il existe une bijection de E dans F . On va voir que cette définition est très intéressante ; en effet, avec cette définition, tous les ensembles infinis n'ont pas le même nombre d'éléments. C'est ce qu'a découvert le mathématicien Georg Cantor dans les années 1870.

Commençons par montrer, dans le cas particulier de l'ensemble $\mathbb{N}$, une propriété caractéristique des ensembles infinis : *enlever (ou rajouter) un élément à un ensemble infini ne change pas le nombre d'éléments de cet ensemble.*

PROPOSITION *Il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ (et aussi entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \setminus \{2\}$, etc.).*

Démonstration. La fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $f(n) = n + 1$ est clairement une bijection. $\square$

L'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble infini le plus simple qu'on connaisse. Nous allons donc comparer, du point de vue du nombre d'éléments, un certain nombre d'ensembles infinis à $\mathbb{N}$.

DÉFINITION Un ensemble E est dit *dénombrable* s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.

REMARQUES

- Puisqu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ (voir ci-dessus) et que la composée de deux bijections est une bijection, on peut remplacer $\mathbb{N}$ par $\mathbb{N}^*$ dans la définition ci-dessus. De même, on peut remplacer $\mathbb{N}$ par $\mathbb{N} \setminus F$ où F est n'importe quel sous-ensemble fini de E .
- Si E est un ensemble infini, on peut montrer qu'il est équivalent de demander l'existence d'une injection de E dans $\mathbb{N}$, ou d'une bijection entre E et $\mathbb{N}$, ou d'une surjection de $\mathbb{N}$ sur E . En particulier, si E est infini, on peut remplacer le mot "bijection" par le mot "injection" dans la définition ci-dessus.

PROPOSITION *L'ensemble $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ est dénombrable⁹.*

Démonstration. On considère l'application $g : \mathbb{N} \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n, 0) = 2n$ et $g(n, 1) = 2n + 1$ pour tout n . C'est clairement une bijection entre $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ et $\mathbb{N}$. $\square$

PROPOSITION *L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable¹⁰.*

⁹Autrement dit, "l'ensemble $\mathbb{N}$ a même nombre d'éléments que deux copies de lui-même".

¹⁰Autrement dit, "l'ensemble $\mathbb{N}$ a même nombre d'éléments qu'une infinité (indiquée par $\mathbb{N}$) de copies de lui-même".

Démonstration. On considère l'application $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $h(i, j) = (2j - 1)2^{i-1} - 1$.

Pour montrer que h est injective, on considère deux couples d'entiers (i, j) et (k, l) tels que

$$(2j + 1)2^i - 1 = (2k + 1)2^l - 1$$

Alors $(2j + 1)2^i = (2k + 1)2^l$, donc 2^i divise $(2k + 1)2^l$. Or $2k + 1$ est impair donc premier avec 2^i . Donc, par le lemme de Gauss, 2^i divise 2^k . Le même raisonnement où on échange les rôles de (i, j) et (k, l) montre que 2^k divise 2^i . On a donc $2^i = 2^k$. On en déduit immédiatement que $i = k$, puis que $j = l$ (en réutilisant l'égalité $(2j + 1)2^i = (2k + 1)2^l$). Par conséquent, h est injective.

Par ailleurs, h est surjective ; en effet, pour tout entier n , on a $n = h(i, j)$ où i et j sont définis comme suit :

- i est l'exposant du facteur 2 dans la décomposition en nombre premiers de $n + 1$;
- $2j + 1$ est le quotient de $n + 1$ par 2^i .

□

Enfin, montrons un fait qui est à l'origine de nombreuses difficultés, de nombreux paradoxes, et de nombreux exemples en topologie et en analyse : "il y a beaucoup plus de réels que d'entiers" ; autrement dit :

PROPOSITION *L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une bijection $i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note alors $x_n = i^{-1}(n)$; on obtient ainsi une suite de réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que tout élément x de $[0, 1]$ est l'un des termes de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le développement décimal normal¹¹ du réel x_n :

$$x_n = 0, a_n^1 a_n^2 a_n^3 \dots$$

Autrement dit, pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note a_n^p le p^{eme} chiffre après la virgule du réel x_n . Pour tout n , on considère un chiffre b_n qui est différent de 0, de 9 et de a_n^n . Enfin, on considère le réel x dont le développement décimal est

$$0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

(notons que x a un unique développement décimal puisque les b_i sont tous différents de 0 et 9). Surtout, *le nombre x n'est égal à aucun des termes de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$* ; en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le n^{eme} chiffre après la virgule de x (c'est-à-dire b_n) est différent du n^{eme} chiffre après la virgule de x_n (c'est-à-dire a_n^n).

On a donc trouvé un élément x de $[0, 1]$ qui n'est égal à aucun des termes de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui contredit notre hypothèse de départ. □

¹¹C'est-à-dire qui ne se termine pas par une infinité de 9. Rappelons en effet que tout nombre décimal (c'est-à-dire du type $10^{-n} \times p$) possède deux développements décimaux dont l'un se termine par une infinité de 9 ; ainsi le nombre 1 peut également s'écrire 0,99999999...

D. Hilbert et G. Cantor

David Hilbert (1862-1943) est l'un des mathématiciens les plus importants de la fin du XIX^{eme} et du début du XX^{eme} siècle. Après avoir fait ses études et sa thèse dans sa ville natale de Königsberg (à l'époque en Prusse, aujourd'hui en Russie), il a rapidement obtenu une chaire dans la prestigieuse Université de Göttingen, où il est resté jusqu'à sa retraite en 1930. La diversité des domaines mathématiques auxquels Hilbert a contribué est remarquable : théorie des invariants en géométrie, théorie des nombres (étude des corps de nombres), analyse fonctionnelle, équations intégrales, physique mathématique (équation de la relativité générale), calcul des variations. Hilbert a joué un rôle important dans l'*axiomatisation* de divers domaines des mathématiques (théorie des ensembles, géométrie, etc.).

Par ailleurs, Hilbert est célèbre pour la liste de 23 problèmes mathématiques, qu'il a proposé au deuxième congrès international des mathématiciens en 1900. Hilbert considérait que la résolution de ces problèmes devait, en un certain sens, constituer le but des mathématiques du XX^{eme} siècle. De fait, chacun (ou presque) des 23 problèmes posés par Hilbert a joué un rôle important dans le développement d'un domaine mathématique au cours du siècle dernier. Certains de ces problèmes ne sont toujours pas résolus.

On trouve une liste des 23 problèmes de Hilbert (avec quelques explications, et l'état d'avancement de chaque problème) à l'adresse internet suivante :

http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/anx1/pb23_hilbert.html



Georg Cantor (1845-1918) est né en Saint Pétersbourg, mais a passé la plupart de sa vie en Allemagne (où il avait émigré avec ses parents dès 1860) et en Suisse. Après une thèse en théorie des nombres, Cantor se tourne vers l'analyse ; il démontre en particulier l'unicité de l'écriture d'une fonction comme somme de série de Fourier. Mais, Cantor reste surtout célèbre pour ses travaux en théorie des ensembles. En 1872, il propose une définition formelle des nombres réels : un nombre réel est une suite d'irrationnels (Dedekind propose sa définition à l'aide des *coupures* la même

année). Dans la foulée, il introduit le concept de *dénombrabilité* et démontre que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable. Mais deux ans plus tard, il prouve que l'ensemble des nombres *transcendants* (un nombre réel est transcendant s'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers) n'est pas dénombrable. En 1877, il démontre que $\mathbb{R}^n$ est en bijection avec $\mathbb{R}$, mais déclare ne pas réellement croire à ce résultat (*“Je le vois, mais je n’y crois pas !”*) ; c’est pourquoi il cherchera dès lors à construire une *théorie axiomatisée des ensembles*.

La plupart des mathématiciens de l’époque désapprouvent l’orientation des travaux de Cantor, ce dont Cantor souffre beaucoup ; en 1884, il subit sa première dépression nerveuse. À partir de cette date, l’activité mathématique de Cantor sera malheureusement entrecoupée de longues périodes de dépression nerveuse, puis de crises de schizophrénie. Il réussira à poser les bases de la théorie moderne des ensembles, mais, dès 1899, sa maladie mentale l’oblige à renoncer à son enseignement et à accepter un poste administratif où il n’a que des tâches routinières à effectuer.



QUIZZ

Question 1.

Est-ce que $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$?

Question 2.

Soit f une application du plan dans lui-même, et A une partie du plan. A-t-on $f(\mathbb{R}^2 \setminus A) = \mathbb{R}^2 \setminus f(A)$?

Question 3.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Décrire avec des intersections et des unions l'ensemble des points x en lesquels la suite de nombres $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 100.

Question 4.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Décrire avec des intersections et des unions l'ensemble des points x en lesquels la suite de nombres $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Question 5.

Décrire avec des intersections et des unions l'ensemble des points x en lesquels la suite de nombres $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Question 6.

Décrire avec des intersections et des unions l'ensemble des points x en lesquels la suite de nombres $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Question 7.

Trouver un IFS dont le fractal limite est un carré (plein).

Question 8.

Quel est l'angle, le rapport et le centre de la similitude $z \rightarrow (2 + 2i)z + 3$?

Question 9.

Que peut-on dire de la composée de deux homothéties du plan ?

Question 10.

Étant donnés deux disques, y a-t-il toujours une similitude qui envoie le premier sur le deuxième ?

Question 11.

Étant donnés A, A', B et B' quatre points du plan, existe-t-il toujours une similitude qui envoie A sur A' et B sur B' ?

Question 12.

Étant donnés deux triangles, à quelle condition existe-t-il une similitude qui envoie le premier sur le deuxième ?

Question 13.

Interpréter l'application $z \mapsto ((1 + iz)(2 - 2i) + 3 + 5i)(1 + i)$ comme une composition de transformation géométrique.

Question 14.

L'éponge de Menger est un ensemble fractal dans $\mathbb{R}^3$, obtenu de la manière suivante. On part d'un cube, on le divise en 27 petits cubes, et on retire le cube central et les huit cubes au centre de chaque face. *Et caetera*.

Quelle est la dimension fractale de l'éponge de Menger ? Quel est son volume ?

Question 15.

Quelle est la dimension fractal de l'ensemble de Cantor ? (question 4 de la feuille II.1 : il s'agit de l'ensemble limite de l'IFS donné par deux homothéties, de rapport $1/2$, et centrées respectivement en $(0, 0)$ et $(1, 0)$).

Question 16.

Soit E une partie du plan $\mathbb{R}^2$. L'intérieur de l'adhérence de E est-il contenu dans E ?

Question 17.

Quelle est l'adhérence de l'intérieur du triangle de Sierpinski ?

Question 18.

On note T_1, T_2 et T_3 les homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ et de centres respectifs $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. On définit une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties du plan par :

$$\begin{aligned} E_0 &= \mathbb{R}^2 \\ E_{n+1} &= T_1(E_n) \cup T_2(E_n) \cup T_3(E_n) \end{aligned}$$

Vers quoi la suite de parties $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Question 19.

On note T la similitude de centre $(1, 0)$ de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On définit une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties du plan par :

$$\begin{aligned} E_0 &= [-1, 1]^2 \\ E_{n+1} &= T(E_n) \end{aligned}$$

Vers quoi la suite de parties $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Question 20.

Soit E_n le graphe de la fonction

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (4x(1-x))^n. \end{aligned}$$

Vers quel ensemble la suite de parties $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Question 21.

Pour tout n , on note E_n le graphe de la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$. Vers quoi la suite de parties du plan $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Question 22.

Combien l'équation différentielle $f' = 2\sqrt{f}$ admet-elle de solutions qui s'annulent en 0 ?

Question 23.

Tout nombre réel est-il racine d'un polynôme de degré 2 ?

Question 24.

Tout nombre réel est-il racine d'un polynôme de degré 2 dont les coefficients a, b, c sont des nombres entiers ?

Question 25.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il en bijection avec $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$?
